UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
SEPTIEMBRE 2010
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOOCIALES II

FASE ESPECÍFICA

INSTRUCCIONES: El alumno debería elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o cálculo simbólico.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCION A

EJERCICIO 1.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Un grupo inversor dispone de un máximo de 9 millones de euros para invertir en dos tipos de fondos de inversión, A y B. El fondo de inversión del tipo A tiene una rentabilidad del 4% anual y una limitación legal de 5 millones de euros de inversión máxima. El fondo de inversión del tipo B tiene una rentabilidad del 3% anual, deben invertirse al menos 2 millones de euros y no hay límite superior de inversión. EL grupo inversor desea invertir en el fondo del tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo del tipo A. ¿Qué cantidad debe invertir el grupo en cada tipo de fondo para obtener el máximo beneficio anual? Calcúlese dicho beneficio máximo.

SOLUCION

Donde: X es el capital en millones invertido en el fondo A.
Y es el capital en millones invertido en el fondo B.

Función objetivo: $F(x,y)=\frac{4}{100}x\cdot 10^6+\frac{3}{100}y\cdot 10^6$

Restricciones:
-“ un grupo inversor dispone de un máximo de 9 millones de euros para invertir”.

$$X+Y\le 9$$

-“el El fondo de inversión del tipo A tiene una rentabilidad del 4% anual y una limitación legal de 5 millones de euros de inversión máxima”

$$0\le X\le 5$$

-“ El fondo de inversión del tipo B tiene una rentabilidad del 3% anual, deben invertirse al menos 2 millones de euros y no hay límite superior de inversión”

$$Y \geq 2$$

-“ El grupo inversor desea invertir en el fondo del tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo del tipo A”

$$Y \leq 2X$$

Resumiendo

$$\begin{cases} X + Y \leq 9 \\ 0 \leq X \leq 5 \\ Y \geq 2 \\ Y \leq 2X \end{cases}$$

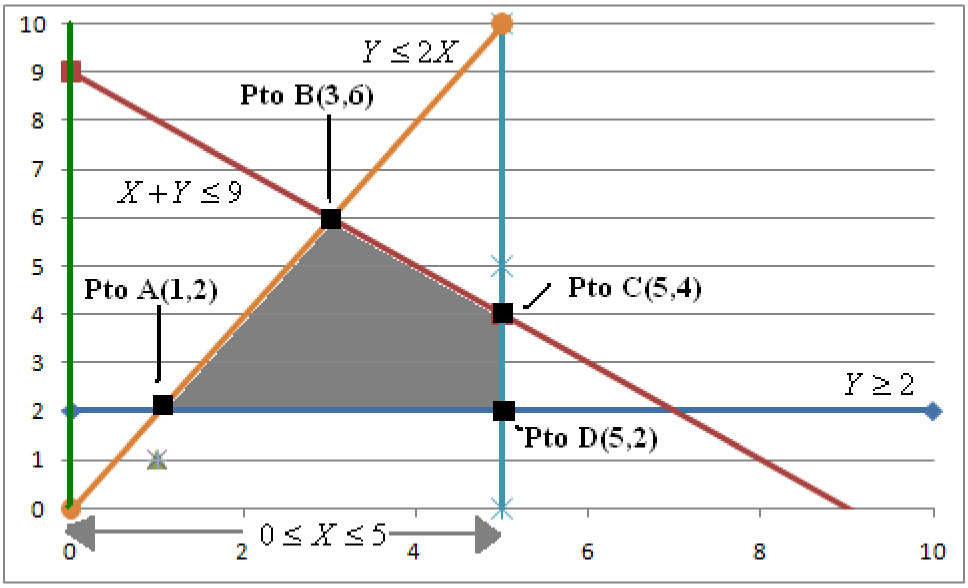
Los puntos de corte se resuelven mediante la resolución de sistemas entre las inecuaciones de las restricciones:

PTO A: $\begin{cases} y = 2x \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow 2 = 2x \rightarrow x = 1 \rightarrow Pto.A(1,2)$

PTO B: $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y = 2 \cdot 3 = 6 \\ x + 2x = 9 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3 \end{matrix} \quad Pto.B(3,6)$

PTO C: $\begin{cases} x = 5 \\ x + y = 9 \end{cases} \rightarrow 5 + y = 9 \rightarrow y = 4 \quad Pto.C(5,4)$

PTO D: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow Pto.D(5,2)$



GRAFICA

	X	Y	$F(x,y) = \frac{4}{100} x \cdot 10^6 + \frac{3}{100} y \cdot 10^6$
$\{Pto.A(1,2)$	1	2	$F(x,y) = \frac{4}{100} \cdot 1 \cdot 10^6 + \frac{3}{100} \cdot 2 \cdot 10^6 = 100000$
$\{Pto.B(3,6)$	3	6	$F(x,y) = \frac{4}{100} \cdot 3 \cdot 10^6 + \frac{3}{100} \cdot 6 \cdot 10^6 = 300000$
$\{Pto.C(5,4)$	5	4	$F(x,y) = \frac{4}{100} \cdot 5 \cdot 10^6 + \frac{3}{100} \cdot 4 \cdot 10^6 = 320000$
$\{Pto.D(5,2)$	5	2	$F(x,y) = \frac{4}{100} \cdot 5 \cdot 10^6 + \frac{3}{100} \cdot 2 \cdot 10^6 = 260000$

La solución válida son las coordenadas del punto $\{Pto.C(5,4)$ con un valor de 320000€, que se obtiene invirtiendo 5 millones en bono del tipo A y 4 millones en bonos del tipo B.

EJERCICIO 2.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

a)Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.
b)Determínese los extremos relativos de f y esbócese su gráfica.

c)Calcúlese al área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x + 1$

SOLUCION

Calculamos el punto donde queremos aplicar la ecuación punto-tangente, como es en el punto de inflexión, deberemos igualar a cero la segunda derivada (condición de punto de inflexión).

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \to f''(x) = 0 \to f''(x) = 6x - 6 = 0 \to x = \frac{6}{6} = 1$$

$$x = 1 \to f(x) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2 \Rightarrow Pto(1,2)$$

Tenemos que buscar la ecuación punto tangente en x=1

La fórmula de la ecuación punto-tangente es la siguiente:

$$y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0) \to$$

Donde:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

La fórmula de la ecuación punto-tangente es la siguiente:

$$y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0) \to y - 2 = (-3) \cdot (x - 1) \to y = -3x + 5$$

b) Para hallar los extremos relativos de la función, buscamos los máximos y mínimos:

Los máximos y mínimos se localizan cuando:

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} f''(b) < 0 & \to Pto(b, f(b)) \quad \textit{Máximo} \\ f''(c) > 0 & \to Pto(c, f(c)) \quad \textit{´Mínimo} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = x \cdot (3x - 6) = 0 \to \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ 3x - 6 = 0 \to x_2 = 2 \end{array}$$

Para x=0

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \to f''(x) = 0 \to f''(x) = 6x - 6 = 0 \to$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo}$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \Rightarrow PTO(0,4)$$

Para x=2

$$f^{/}(x)=3x^{2}-6x \to f^{//}(x)=0 \to f^{//}(x)=6x-6=0 \to$$

$$f^{//}(2)=6\cdot 2-6=6>0 \Rightarrow Mínimo$$

$$f(2)=2^{3}-3\cdot 2^{2}+4=0 \Rightarrow PTO(2,0)$$

Puntos de corte:

EJE X

$$f(x)=0 \to f(x)=x^{3}-3x^{2}+4=0 \to Método \quad de \quad Ruffini$$

	1	-3	0	4
2		2	-2	-4
	1	-1	-2	0
2		2	2	
	1	1	0	
-1		-1		
	1	0		

$$f(x)=0 \to f(x)=(x-2)^{2}\cdot(x+1)=0 \to$$

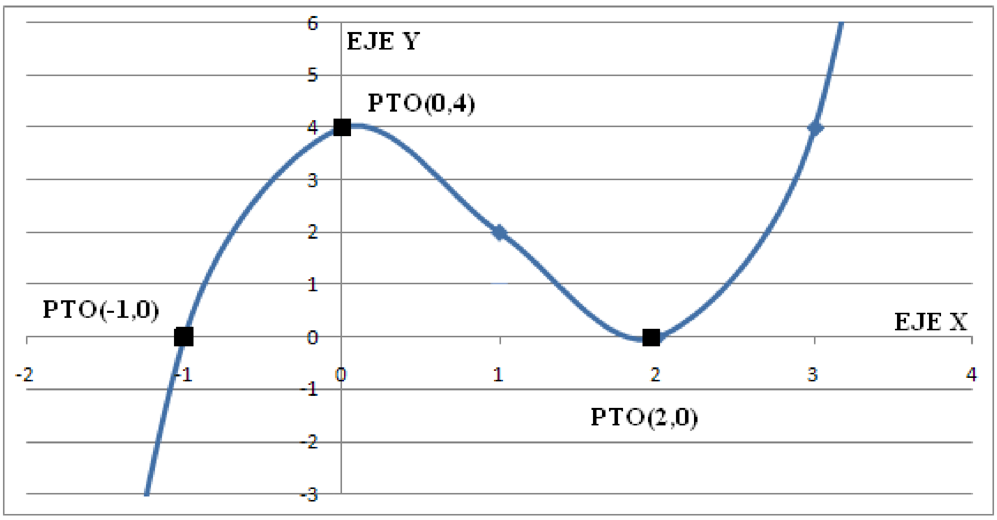
$$\to \begin{array}{l} x-2=0 \to x=2 \\ x+1=0 \to x=-1 \end{array}$$

PTO (1,0)
PTO (2,0)

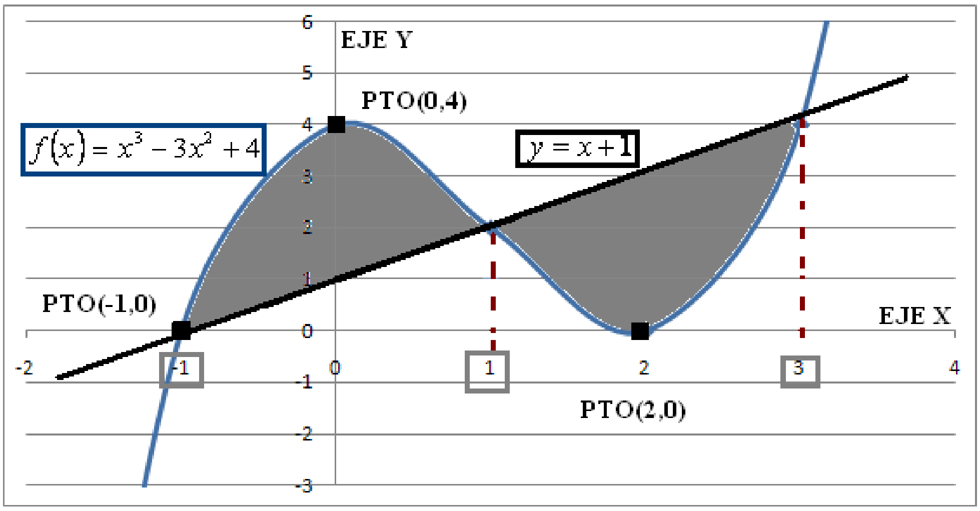
EJE Y

$$\to x=0 \to f(x)=0^{3}-3\cdot 0^{2}+4=4 \to PTO(0,4)$$

<u>GRÁFICA:</u>



c) Lo primero es dibujar las dos gráficas para poder definir el área de integración. A simple vista podemos definir los límites de integración sin necesidad de más operaciones, pero vamos a calcular los límites de integración igualando ambas funciones en un sistema y nos tendrá que dar los valores: -1,1 y 3.



$$AREA = \int_{-1}^{1}\left[x^3 - 3x^2 + 4 - (x+1)\right]dx + \int_{1}^{3}\left[(x+1) - (x^3 - 3x^2 + 4)\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[x^3 - 3x^2 - x + 3\right]dx + \int_{1}^{3}\left[-x^3 + 3x^2 + x - 3\right]dx = \left[\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\right]_{-1}^{1} +$$

$$\left[\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x\right)\right]_{1}^{3} = \left[\left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\right]_{-1}^{1} + \left[\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right)\right]_{1}^{3} =$$

$$\left[\left(\frac{1^4}{4} - 1^3 - \frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3\cdot(-1)\right)\right] +$$

$$+\left[\left(-\frac{3^4}{4} + 3^3 + \frac{3^2}{2} - 3\cdot 3\right) - \left(-\frac{1^4}{4} + 1^3 - \frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right)\right] == \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{7}{4} =$$

$$= \frac{32}{4} = 8\ u^2$$

EJERCICIO 3.(Puntuación máxima: 2 puntos)

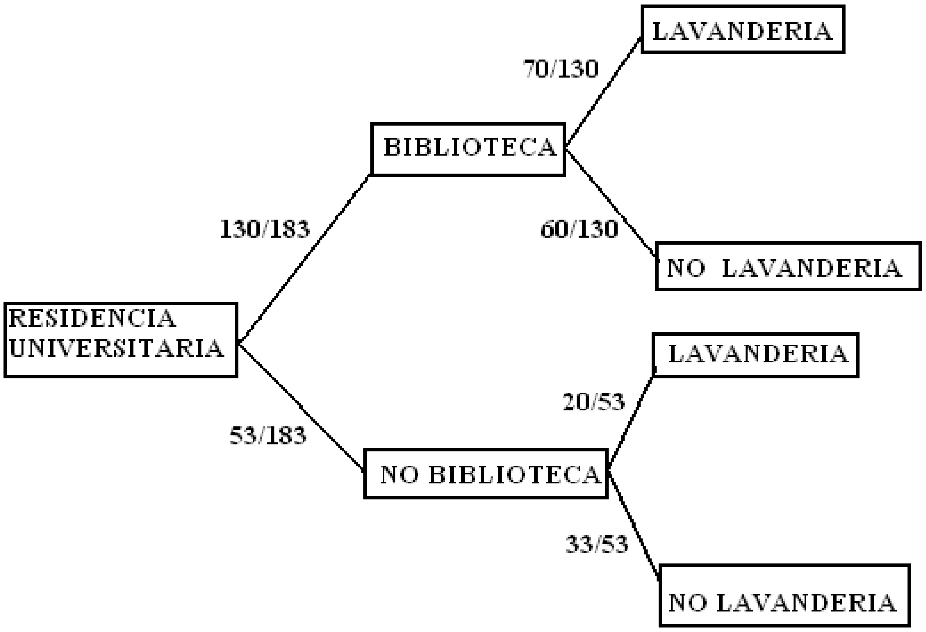
En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos, 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante al azar.

a)¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería?.

b)Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

SOLUCION

Lo resuelvo mediante un diagrama de árbol:



a)

$$P(use \quad la \quad lavanderia) = P(biblioteca \cap lavanderia) + P(no \quad biblioteca \cap lavanderia) =$$

$$= \frac{130}{183}\cdot\frac{70}{130} + \frac{53}{183}\cdot\frac{20}{53} = \frac{90}{183} = 0.4918 \Rightarrow 49.18\%$$

b)

$$P\left(use \quad la \quad biblioteca \Big/ no \quad lavanderia\right) = P\left(biblioteca \cap no \quad lavanderia \Big/ no \quad lavanderia\right) =$$

$$= \frac{\frac{130}{183}\cdot\frac{60}{130}}{1 - P(lavanderia)} = \frac{\frac{60}{183}}{1 - 0.4918} = \frac{0.3279}{0.5082} = 0.6453 \Rightarrow 64.53\%$$

EJERCICIO 4.(Puntuación máxima: 2 puntos)

Para medir el coeficiente de inteligencia μ de un individuo, se realizan test cuya calificación X se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de media igual a μ y desviación típica igual a 15. Un cierto individuo realiza 9 test con independencia.

a) Si la calificación media de dichos test es igual a 108, determínese un intervalo de confianza al 95% para su coeficiente de inteligencia μ .

b) Si el individuo que ha realizado los 9 test tiene un coeficiente de inteligencia μ =110. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una calificación media muestral mayor que 120?.

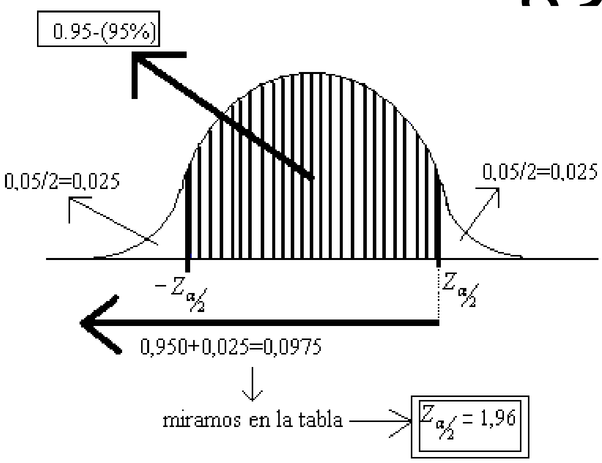
DATOS:

$\sigma = 15$, $\mu = 108$, $n = 9$ *test* y 95% de confianza

SOLUCION

a) $Intervalo.de.Confianza = I.C = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Cogemos la gráfica de la distribución de probabilidad normal estandar, N(0,1) y hallamos el $\left(Z_{\alpha/2} \right)$.



Sustituimos en la fórmula del Intervalo de Confianza:

$$\Rightarrow I.C = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(108 \pm 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{9}} \right) = \left(108 \pm 1{,}96 \cdot 5 \right) = \left(108 \pm 9.8 \right) =$$

$$= \left(108 - 9.8 ; 108 + 9.8 \right) = \left(98.2 ; 117.8 \right)$$

El coeficiente intelectual de un individuo estará comprendido entre 98.2 y 117.8 con un intervalo de confianza del 95%.

b) $N : (\mu, \sigma) \rightarrow N : (110{,}15) \xrightarrow{n=9} N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \rightarrow N(110, \frac{15}{\sqrt{9}}) \rightarrow N(110{,}5)$

$$\left. \begin{array}{c} N(110{,}5) \\ P(Z > 120) \end{array} \right\} \Rightarrow P(Z > \frac{120 - 110}{5}) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.028 = 2.23\%$$

Por tanto la probabilidad de que la media de que entre 9 test realizados sea maor de 120 es de un 2.23%

OPCION B

EJERCICIO 1.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

a) Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Para a=-1, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para a=0, calcúlense todas las soluciones del sistema lineal $A\cdot X = 0$

SOLUCION

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

a) $$|A| = (a-2)\cdot a\cdot(a+1) + 2\cdot2\cdot2\cdot a + 2\cdot(a+1)\cdot2\cdot(-1) - \left[(-1)\cdot a\cdot2\cdot a + 2\cdot2\cdot(a+1) + (a-2)\cdot2\cdot2\cdot(a+1)\right] = a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$|A| = a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \rightarrow |A| = a\cdot(a^2 - 3a + 2) = 0 \rightarrow$$

$$|A| = a\cdot(a^2 - 3a + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} a_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ a_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$|A| = a\cdot(a^2 - 3a + 2) = 0 \rightarrow |A| = a\cdot(a-2)\cdot(a-1) = 0$$

Para $a = 0,1,2$, el determinante de la matriz es cero y por tanto no tiene matriz inversa.

b)

Dada la matriz $$A = \begin{pmatrix} -1-2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2\cdot(-1) & 2(-1+1) & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.- Hallo el determinante de A:

$$|A| = (-1)\cdot(-1-2)\cdot(-1-1) = (-1)\cdot(-3)\cdot(-2) = -6$$

2.- Hallo los adjuntos de A: $Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} = 0\ ;\ A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} = -4\ ;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3} = -2$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+1} = 0\ ,\ A_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+2} = -2\ \ A_{23} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+1} = 3\ ;\ A_{32} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2} = 4\ \ A_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+3} = -1$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}^t \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} * Adj(A) = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ ;\ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;$$

$$a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\overline{A}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) \neq 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \\ \left|\overline{A}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg\left(\overline{A}\right) \neq 3 \rightarrow \left|\overline{A}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg\left(\overline{A}\right) = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} rg(A) = rg\left(\overline{A}\right) = 2 \\ n = 3 \end{array} \rightarrow Sistema.Compatible.In\det er\min ado \Rightarrow (S.C.I.)$$

$$\longrightarrow x=\lambda \rightarrow \begin{cases} -2\lambda+2y-z=0 \\ 2\lambda+2z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \rightarrow 2z=-2\lambda \rightarrow z=\frac{-2\lambda}{2}=-\lambda$$

$$2y-\lambda=0 \rightarrow 2y=\lambda \rightarrow y=\frac{\lambda}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\dfrac{\lambda}{2} \\ z=-\lambda \end{array} \right.$$

EJERCICIO 2.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1\, si & x<0 \\ ax+b\, si & 0\le x\le 3 \\ x-5\ si & x>3 \end{cases}$$

a) Calcúlense a y b para que la función f sea continua en todos los puntos.
b) ¿Existen valores de a y b para los cuales f es derivable en x=3? Razónese la respuesta.
c) Para a=4, b=-1, calcúlense la integral definida $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

SOLUCION

a)La función es continua en todos los números reales, excepto en los puntos x=o y x=3, donde estudiaremos la continuidad por separado.

1) Para x=0

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases} f(0)=a\cdot 0+b=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(0^2+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a\cdot o+b)=a\cdot 2+b=2a+b \end{cases} \Rightarrow$$

Es Continua si $b=1$

2) Para x=3

$$f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases} f(3)=a\cdot 3+b=3a+b \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3a+b)=3a+b \Rightarrow \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3-5)=-2 \end{cases}$$

Es Continua si $3a+b=-2$

Teniendo en cuenta ambas condiciones, realizamos un sistema, para hallar a y b:

$$\begin{cases} b = 1 \\ 3a + b = -2 \end{cases} \rightarrow 3a + 1 = -2 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow a = -1$$

la función resulta

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1\, si & x < 0 \\ -x + 1 si & 0 \le x \le 3 \\ x - 5\;\; si & x > 3 \end{cases}$$

b) Para que la función sea derivable en x=3, primero ha de ser continua en x=3, y para que la función sea continua en ese punto, se tenía que cumplir se debe cumplirse $3a + b = -2$:

$f'(3^-) = f'(3^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si & x < 0 \\ a & si & 0 \le x \le 3 \\ 1 & si & x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(3^-) = a \\ f'(3^+) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

Teniendo en cuenta ambas condiciones, realizamos un sistema, para hallar a y b:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = -2 \end{cases} \rightarrow 3 \cdot 1 + b = -2 \rightarrow 3 + b = -2 \rightarrow b = -5$$

la función resulta

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 si & x < 0 \\ x - 5\;\; si & 0 \le x \le 3 \\ x - 5\;\; si & x > 3 \end{cases}$$

Observamos que en el punto x=3, la función es la misma, la función queda simplificada de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 si & x < 0 \\ x - 5\;\; si & x \ge 0 \end{cases}$$

c) Para a=4, b=-1, calcúlense la integral definida $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 si & x < 0 \\ 4x - 1 si & 0 \le x \le 3 \\ x - 5\;\; si & x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0}\left(x^2+1\right)dx + \int_{0}^{2}\left(4x-1\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{4x^2}{2}-x\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0} + \left[2x^2-x\right]_{0}^{2} = = \left[\left(\frac{0^3}{3}+0\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-1\right)\right]+\left[\left(2\cdot 2^2-2\right)-\left(2\cdot 0^2-0\right)\right]=$$

$$= -\left(\frac{-1}{3}-1\right)+(6+0) = = \left(\frac{-1-3}{3}\right)+6 = \frac{4}{3}+6 = \frac{4+18}{3} = \frac{22}{3}$$

Ejercicio 3.(Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A)=0.6$. Calcúlese $P\left(A\cap\overline{B}\right)$ en cada uno de los siguientes casos:

a)A y B son mutuamente excluyentes.

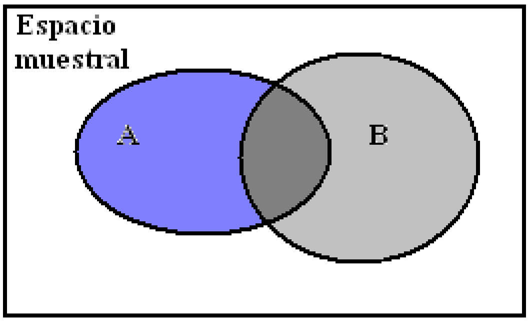
b) $A\subset B$.

c) $B\subset A\, y \quad P(B)=0.3$.

d) $P(A\cap B)=0.1$.

SOLUCION

a) A y B son mutuamente excluyentes

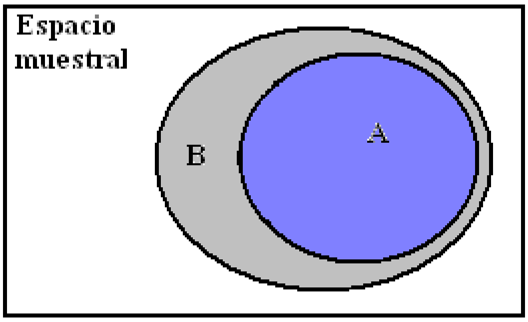


Si son sucesos mutuamente excluyentes, la intersección entre ambos sucesos es cero.

$\left(A\cap\overline{B}\right)$ La intersección del suceso A y lo contrario del suceso B, es el suceso A.

$P\left(A\cap\overline{B}\right) = P(A)-P(A)-P(A\cap B) = 0.6-0-0 = 0.6$

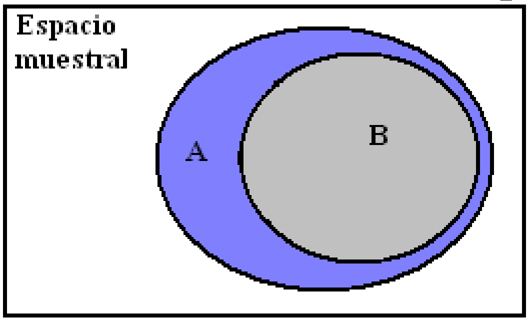
b) $A\subset B$



Si el suceso A pertenece al suceso B, quiere decir que el suceso B engloba al suceso A.

$$P(A\cap B)=P(A)$$
$$P\left(A\cap \overline{B}\right)=P(A)-P(A)-P(A\cap B)=P(A)+0-P(A)=0.6+0-0.6=0$$

c) $B\subset A\, y \quad P(B)=0.3$



$$P(A\cap B)=P(B)$$
$$P\left(A\cap \overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(B)=0.6-0.3=0.3$$

d) $P(A\cap B)=0.1$
$$P\left(A\cap \overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap B)=0.6-0.1=0.5$$

<u>Ejercicio 4.(Puntuación máxima: 2 puntos)</u>

El saldo en cuenta a fin de año de los clientes de una cierta entidad bancaria se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 400 €. Con el fin de estimar la media del saldo en cuenta a fin de año para los clientes de dicha entidad, se elige una muestra aleatoria simple de 100 clientes.

a) ¿Cuál es el nivel máximo de confianza de la estimación si se sabe que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional es menor o igual que 66€?.

b) Calcúlese el tamaño mínimo necesario de la muestra que ha de observarse para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 40€, con un nivel de confianza del 95%

SOLUCION

a)Cuando nos dicen que "el valor absoluto de la diferencia" nos quieren decir que si la media poblacional se encuentra en el intervalo $P(-66 < x > +66)$.

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{400}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu, 40)$$

Vamos a tipificar la variable para nuestro caso para calcular la probabilidad:

$$P\left(\frac{-66}{40} < Z > \frac{+66}{40}\right) = P\left(\frac{-66}{40} < Z > \frac{66}{40}\right) = P\left(-1.65 < \bar{x} > 1.65\right) = P(Z \leq 1.65) -$$

$$P(Z \leq -1.65) = 0.9505 - (1 - P(Z < 1.65)) = 0.9505 - (1 - 0.9505)) = 0.901 \approx 90\%$$

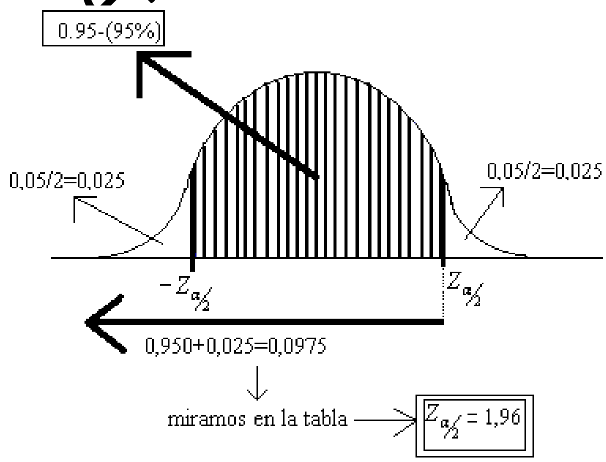
El nivel de confianza para este intervalo es del 90%.

b) Sustituimos en la fórmula que relaciona el Intervalo de Confianza y el Error:

$$Error \quad máximo > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow$$

Para un intervalo del 95%.

Cogemos la gráfica de la distribución de probabilidad normal estandar, N(0,1) y hallamos el $\left(Z_{\alpha/2}\right)$.



$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{Error.máximo}\right)^2 \Rightarrow n > \left(\frac{1{,}96 \cdot 400}{66}\right)^2 = (11.88)^2 = 141.1 \Rightarrow n = 142 \quad elementos$$