UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
SEPTIEMBRE 2009
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOOCIALES II
EXAMEN

INSTRUCCIONES: El alumno debería elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o cálculo simbólico.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCION A

EJERCICIO 1.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0,3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 €. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando un beneficio de 3 €. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas de fabricación y 200 horas de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que deben venderse semanalmente para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio.

DATOS DEL PROBLEMA:

[redacted]	Fabricación	Barnizado	Beneficio
X (Contrachapado A)	0,3	0,2	4
Y (Contrachapado B)	0,2	0,2	3
Disponible	240	200	

Tabla 1. Datos del problema

Función objetivo $\rightarrow Z = 4{\cdot}x + 3{\cdot}y$

Según los datos de la tabla 1, realizamos las ecuaciones correspondientes, primero la del papel reciclado y luego la del papel normal, Damos valores para dibujar las gráficas

$0{,}3{\cdot}x+0{,}2{\cdot}y \leq 240$ $\Longrightarrow$

x	0	800
y	1200	0

$0{,}2x+0{,}2y \leq 200$ $\Longrightarrow$

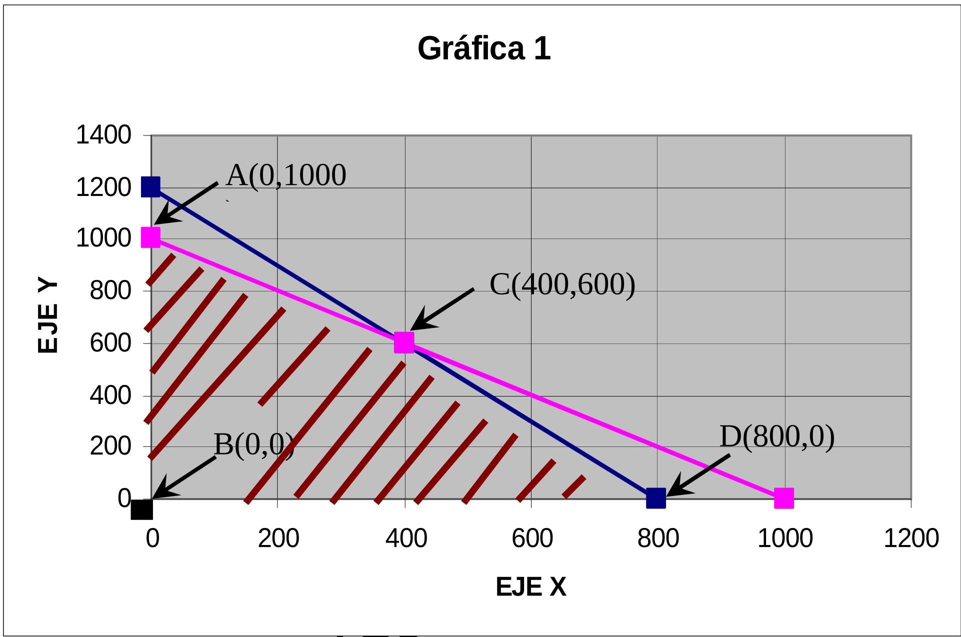
x	0	1000
y	1000	0

Tabla 2. Ecuaciones del problema

Punto	Vértices(X,Y)	Z=4·x+3·y	Z=4·x+3·y
A	A(0,1000)	Z=4·0+3·1000=	3000
B	B(0,0)	Z=4·0+3·0=	0
C	C(400,600)	Z=4·400+3·600=	3400
D	D(800,0)	Z=4·800+3·0=	3200

Tabla 3. Datos de los puntos y vértices

Dibujamos los datos de la tabla 3, señalando la zona marcada y los vértices.



EJERCICIO 2.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+24 & si \quad x\le 3 \\ x^2+9 & si \quad -3<x<2 \\ -x+15 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función f.

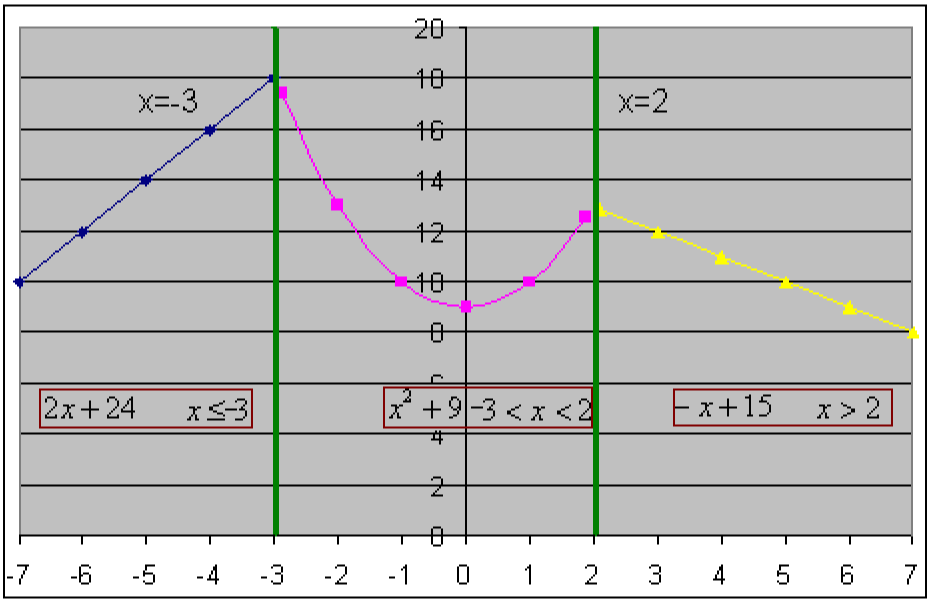
Tabla de valores:

x	-7	-6	-5	-4	-3
y	10	12	14	16	18

x	-2,9	-2	-1	0	1	1,9
y	17,41	13	10	9	10	12,61

x	2,1	3	4	5	6	7
y	12,9	12	11	10	9	8

Gráfica:



b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1.

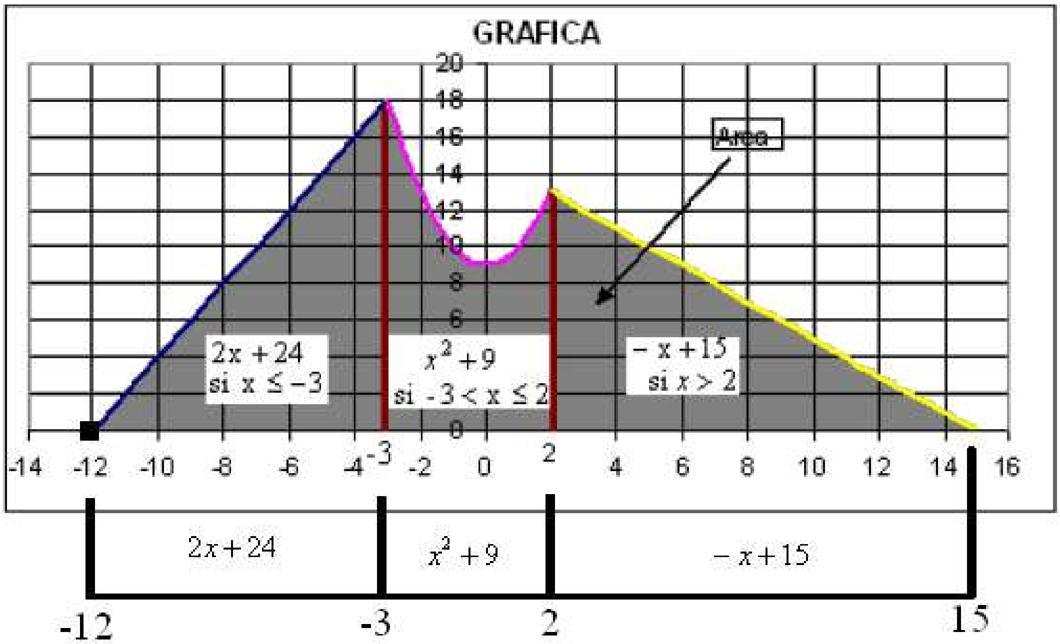
$$y - f(x) = f'(x)\cdot(x - x_0) \Rightarrow y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$$

Donde: $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2\cdot 1 = 2$, $\quad f(x) = x^2 + 9 \Rightarrow f(1) = 1^2 + 9 = 10$

Sustituimos en la ecuación punto tangente:

$$y - 10 = 2\cdot(x-1) \Rightarrow y = 2x + 8$$

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.



$$Area=\int_{-12}^{-3}(2x+24)dx+\int_{-3}^{2}(x^2+9)dx+\int_{2}^{15}(-x+15)dx=\left[\frac{2x^2}{2}+24x\right]_{-12}^{-3}+\left[\frac{x^3}{3}+9x\right]_{-3}^{2}+\left[-\frac{x^2}{2}+15x\right]_{2}^{15}=$$

$$\left|\frac{2\cdot(-3)^2}{2}+24\cdot(-3)-\left(\frac{2\cdot(-12)^2}{2}+24\cdot(-12)\right)\right|+\left|\frac{2^3}{3}+9\cdot 2-\left(\frac{2\cdot(-3)^3}{3}+9\cdot(-3)\right)\right|+\left|-\frac{(15)^2}{2}+15\cdot 15-\left(-\frac{2^2}{2}+15\cdot 2\right)\right|=$$

$$=81+56.66+84.5=222{,}16$$

EJERCICIO 3.(Puntuación máxima: 2 puntos)

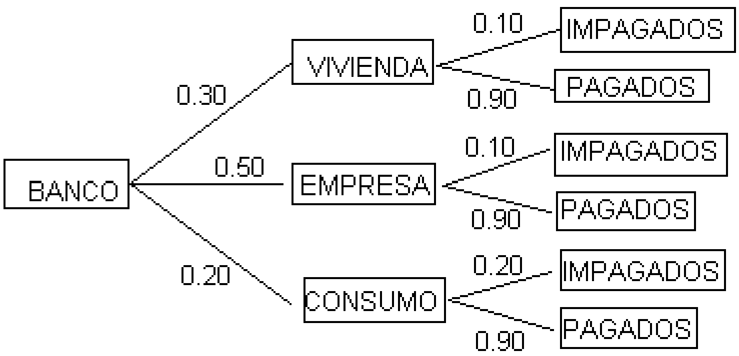
En un cierto banco el 30% de los créditos concedidos son para vivienda, el 50% para empresas y el 20% para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda el 10% resultan impagados, de los créditos concedidos a empresa son impagados el 20% y de los de consumo resultan impagados el 10%.

a)Calcular la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b)¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al aza sea de consumo sabiendo que se ha pagado?

<u>**SOLUCION**</u>

a)Calcular la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.



$$P(Pagados) = P(Vivienda \cap Pagados) + P(Empresa \cap Pagados) + P(Consumo \cap Pagados) =$$
$$= 0.3 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.85 \Rightarrow 85\%$$

b)¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al aza sea de consumo sabiendo que se ha pagado?

$$P\left(\frac{Consumo \cap pagados}{Pagados}\right) = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.85} = 0.2118 \Rightarrow 21.18\%$$

EJERCICIO 4.(Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros. a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta. b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?.

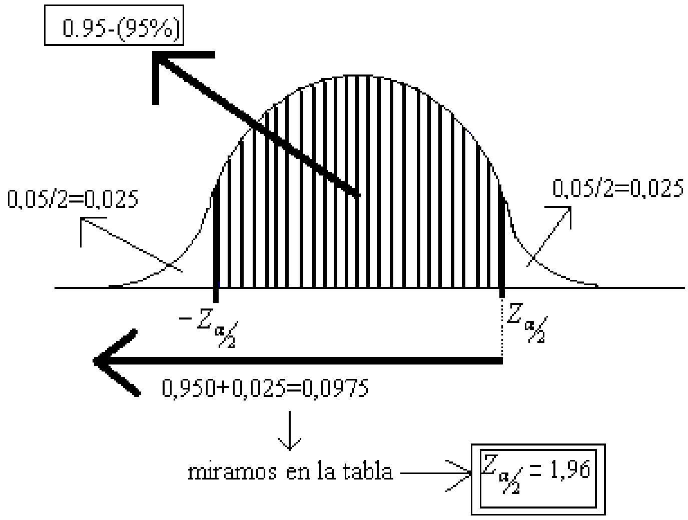
DATOS:

$\sigma = 55€$, $\mu = 320€$ $n = 81.familias$ y 95% de confianza

SOLUCION

a)¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta

*) Cogemos la gráfica de la distribución de probabilidad normal estandar, N(0,1) y hallamos el $\left(Z_{\alpha/2}\right)$.



$$95\% de.confianza \Rightarrow \left(Z_{\alpha/2}\right) = 1,96$$

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{Error.máximo}\right)^2 \Rightarrow Error > \sqrt{\left(\frac{\left(Z_{\alpha/2} \cdot \sigma\right)^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{(1,96 \cdot 55)^2}{81}} = 11,97$$

No, el error máximo es de 11,97 euros.

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?.

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{Error.máximo}\right)^2 \Rightarrow n > \left(\frac{1,96 \cdot 55}{10}\right)^2 = (10,78)^2 = 116,21 \Rightarrow n = 117$$

OPCION B

EJERCICIO 1.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ky + z = 3 \\ kx - 3z = 6 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores de k.
b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
c) Resolver el sistema para k=3

<u>SOLUCION</u>

a)Discutir el sistema según los valores de k

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+ky+z=3 \\ kx-3z=6 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3k+0+k-k^2-0+3 = -k^2-2k+3=0=0 \rightarrow$$

$$k = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} k_1 = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ k_2 = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

1) Para k=1.

$$\Rightarrow \left(\overline{A_1}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) \neq 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A)=2 \\ |\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) \neq 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6-0 \neq 0 \rightarrow rg(A)=2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(\overline{A})=2 \\ n=3 \end{array} \rightarrow Sistema\,Compatible\,Indeterminado \Rightarrow (S.C.I.)$$

2) Para k=-3.

$$\Rightarrow \left(\overline{A_1}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) \neq 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A)=2 \\ |\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -60 \neq 0 \Rightarrow rg(\overline{A})=3 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(\overline{A})=3 \\ n=3 \end{array} \rightarrow Sistema\,Incompatible \Rightarrow (S.I.)$$

3) Para k$\neq$ -3,1.

$$\begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(\overline{A})=3 \\ n=3 \end{array} \rightarrow Sistema.Compatible.Determinado \Rightarrow (S.C.D.)$$

b)Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

(Para k=1) $\Rightarrow \begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(\overline{A})=2 \\ n=3 \end{array} \Rightarrow (S.C.I.)$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y+z=3 \\ x+0y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \rightarrow \begin{cases} \lambda+y+z=3 \\ \lambda+y+z=3 \\ -\lambda+0y-3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=3-\lambda \\ y+z=3-\lambda \\ -3z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=3-\lambda \\ -3z=\lambda \end{cases} \rightarrow z=\frac{-\lambda}{3}$$

$$y-\frac{\lambda}{3}=3-\lambda \rightarrow y=3-\lambda+\frac{\lambda}{3}=\frac{9-3\lambda+\lambda}{3}=\frac{9-2\lambda}{3}$$

Sustituyo en la tercera ecuación: $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\dfrac{9-2\lambda}{3} \\ z=\dfrac{-\lambda}{3} \end{array}\right.$

. c) Resolver el sistema para k=3. $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(\overline{A})=3 \\ n=3 \end{array} \right. \Rightarrow (S.C.D.)$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+3y+z=3 \\ 3x-3z=6 \end{cases} \Rightarrow |\overline{A}| = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right| = -12$$

Resuelvo las incógnitas: x, y, z: mediante la regla de Cramer: $x=\dfrac{|\Delta x|}{|A|}$,

$y=\dfrac{|\Delta y|}{|A|}$ y $z=\dfrac{|\Delta z|}{|A|}$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -30, \quad |\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad |\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$x=\frac{|\Delta x|}{|A|}=\frac{-30}{-12}=\frac{5}{2} \quad y=\frac{|\Delta y|}{|A|}=\frac{0}{-12}=0 \quad z=\frac{|\Delta z|}{|A|}=\frac{-6}{-12}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ y=0 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

EJERCICIO 2.(Puntuación máxima: 3 puntos)

El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinada por la función: $B(x) = -x^2 + 7x - 10$, donde x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a)Representa gráficamente la función B(x) con x≥0.

b)Calcular los hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera para maximizar su beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

c)Calcular las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera para no incurrir en pérdidas(es decir, beneficio negativo).

<u>SOLUCION</u>

a)Representa gráficamente la función $B(x) = -x^2 + 7x - 10$

Calculamos el vértice y los puntos de corte con los ejes de coordenadas, con esos tres puntos puedo dibujar la parábola:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

Puntos de corte:

EJE X

$$\rightarrow f(x) = 0 \rightarrow f(x) = -x^2 + 7x - 10 = 0 \rightarrow \Rightarrow x = \frac{-(7) \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-10)}}{-2\cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{-2} =$$

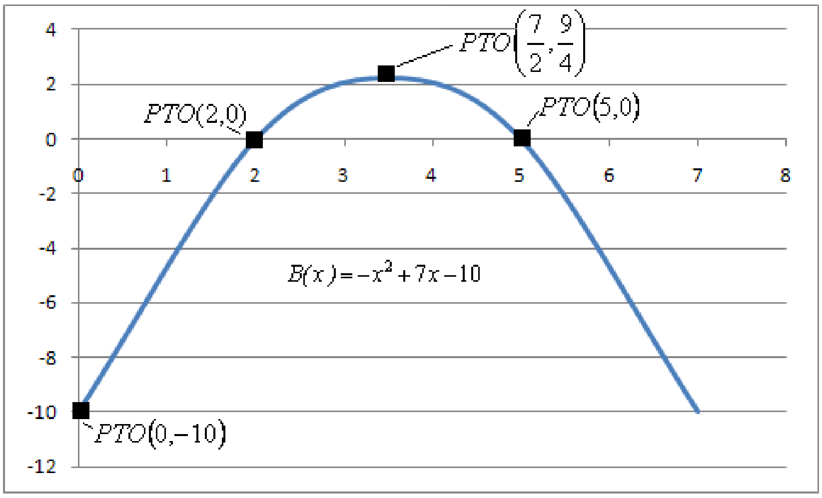
$$= \frac{-7 \pm 3}{-2} = \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{-7+3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \rightarrow PTO(2,0) \\ x_2 = \frac{-7-3}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \rightarrow PTO(5,0) \end{array}$$

EJE Y

$$\rightarrow x = 0 \rightarrow f(x) = -0^2 + 7\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow PTO(0,-10)$$

VERTICE: $\rightarrow V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-7}{2\cdot(-1)}, -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7\cdot\frac{7}{2} - 10\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$

GRAFICA



b)Calcular los hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera para maximizar su beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Para calcular el máximo: $B'(x) = 0 \rightarrow \quad B'(x) = -2x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$

$$B\left(\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7\cdot\left(\frac{7}{2}\right) - 10 = \frac{49}{4} + \frac{49}{2} - 10 = \frac{49+98-40}{4} = \frac{107}{4} = 26.75$$

Para 3,5 hectolitros se obtienen los beneficios máximos, y se consigue una ganancia de 2675€

c)Calcular las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera para no incurrir en pérdidas(es decir, beneficio negativo).

Si observamos la gráfica, nos fijamos que los valores negativos (cuando la empresa entrará en pérdidas) coincidirán cuando la empresa entre en pérdidas, por tanto la empresa tendrá que producir entre 2 y 5 hectolitros para que no entre en pérdidas.

Ejercicio 3.(Puntuación máxima: 2 puntos)

La probabilidad de que un habitante de cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0.55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0.40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0.25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

a)Al menos uno de los tipos de música.
b)La música clásica y también la moderna.
c)Sólo la música clásica.
d)Sólo la música moderna.

DATOS

55% Le gusta la música moderna.
40% Le gusta la música clásica.
20% No le gusta ni la música moderna ni clásica.

SOLUCION

$$a)P(al.menos.un.tipo.de.musica) = 1 - P(\overline{Moderna} \cap \overline{Clásica}) = 1 - P\left(\overline{Moderna \cup Clásica}\right) =$$
$$= 1 - 0.25 = 0.75$$

$$b)P(Moderna \cap Clásica) = P(Moderna) + P(clásica) - P(Moderna \cup Clásica) =$$
$$= 0.55 + 0.40 - 0.75 = 0.20$$
$$c)P(\overline{Moderna} \cap Clásica) = P(Moderna \cap Clásica) + P(clásica) = -0.20 + 0.40 = 0.20$$
$$d)P(Moderna \cap \overline{Clásica}) = P(Moderna) - P(Moderna \cap Clásica) = 0.55 - 0.20 = 0.35$$

Ejercicio 4.(Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la estancia, en días, de un paciente en un hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria formada por 20 pacientes se ha obtenido una media muestral igual a 8 días. a) Determina un intervalo de confianza del 95% para la estancia media de un paciente. b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?.

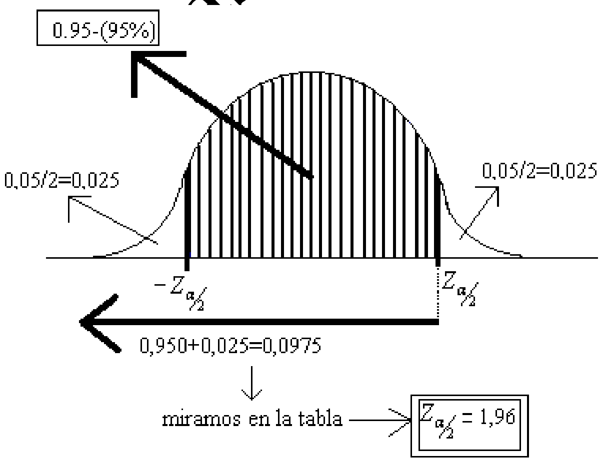
a)Determina un intervalo de confianza del 95% para la estancia media de un paciente

$N(\mu, \sigma) = N(8;1,5)$

$\overline{X} = 8.dias$, $n = 10$ y 95% de confianza.

$$Intervalo.de.Confianza = I.C = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Cogemos la gráfica de la distribución de probabilidad normal estandar, N(0,1) y hallamos el $\left(Z_{\alpha/2}\right)$.



Sustituimos en la fórmula del Intervalo de Confianza:

$$\Rightarrow I.C = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(8 \pm 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{20}}\right) = (8 \pm 3,94) = (8 - 3,94;5,95 + 3,94) = (4,06;11,94)$$

b)¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?.

Aplicamos la fórmula del Error y la Amplitud.

$$Amplitud = 2 \cdot Error \Rightarrow Error = \frac{Amplitud}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Sustituimos en la fórmula que relaciona el Intervalo de Confianza y el Error:

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{Error.máximo} \right)^2 \Rightarrow n > \left(\frac{1{,}96 \cdot 9}{2} \right)^2 = (8{,}82)^2 = 77{,}79 \Rightarrow n = 78$$