UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
JUNIO 2009
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOOCIALES II
EXAMEN

INSTRUCCIONES: El alumno debería elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o cálculo simbólico.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCION A

EJERCICIO 1.(Puntuación máxima: 3 puntos)

1.- Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x+y+kx=4 \\ 2x-y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro k.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para k=0

SOLUCION

a) Discutir el sistema según los valores de k

$$\begin{cases} x+y+kz=4 \\ 2y-y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1+6k-2-k-6+2=5k-5=0 \rightarrow k=1$$

1) Para k=1.

$$\Rightarrow \left(\overline{A_1}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rg(A)\neq 3 \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow rg(A)=2 \\ |\overline{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rg(\overline{A})\neq 3 \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=5-8\neq 0 \rightarrow rg(A)=2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(\overline{A})=2 \\ n=3 \end{array}\right\} \rightarrow Sistema\,Compatible\,Indeterminado \Rightarrow (S.C.I.)$$

b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones **(Para k=1.)**

$$\left.\begin{array}{l} rg(A)=2 \\ rg(\overline{A})=2 \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (S.C.I.)$$

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \rightarrow \begin{cases} \lambda+y+z=4 \\ 2\lambda-y+2z=5 \\ -\lambda+3y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=4-\lambda \\ -y+2z=5-2\lambda \\ 3y-z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=4-\lambda \\ \underline{3y-z=\lambda} \quad + \\ 4y=4 \end{cases} \rightarrow y=1$$

$$\Rightarrow y=1 \rightarrow 3y-z=\lambda \;\alpha\; 3\cdot 1-z=\lambda \rightarrow z=3-\lambda \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1 \\ z=3-\lambda \end{array}\right.$$

. c) Resolver el sistema para k=0. $\Rightarrow \left|\begin{array}{l} rg(A)=3 \\ rg(\overline{A})=3 \\ n=3 \end{array}\right. \Rightarrow (S.C.D.)$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow |A|=\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right|=-5$$

Resuelvo las incógnitas: x, y, z: mediante la regla de Cramer: $x=\dfrac{|\Delta x|}{|A|}$,

$y=\dfrac{|\Delta y|}{|A|}$ y $z=\dfrac{|\Delta z|}{|A|}$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -15, \quad |\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad |\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|A|} = \frac{-15}{-5} = 3 \quad y = \frac{|\Delta y|}{|A|} = \frac{-5}{-5} = 1 \quad z = \frac{|\Delta z|}{|A|} = \frac{0}{-5} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 2.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

a)Determínese los extremos relativos de f.
b)Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3.
c)Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

<u>SOLUCION.</u>

a) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

Igualamos la primera derivada a cero para hallar los extremos relativos de la función:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 \rightarrow f'(x) = 2\cdot(x^2 - 1)\cdot 2x = 4x\cdot(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{matrix}$$

Tomamos valores entre los puntos singulares (-1,0,1).Siguiendo el criterio de:

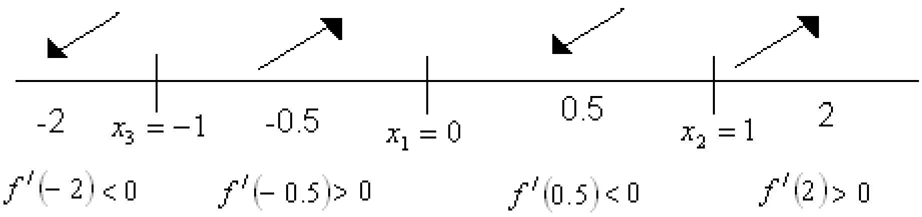
$$f'(x) < 0 \rightarrow decreciente$$
$$f'(x) > 0 \rightarrow creciente$$

$$f'(-2) = 4\cdot(-2)\cdot((-2)^2 - 1) = (-8)\cdot 3 = -24 < 0$$

$$f'(-0.5) = 4\cdot(-0.5)\cdot((-0.5)^2 - 1) = (-1)\cdot(-0.75) = 0.75 > 0$$

$$f'(0.5) = 4(0.5)\cdot((0.5)^2 - 1) = (2)\cdot(-0.75) = -0.75 < 0$$

$$f'(2) = 4(2)\cdot(2^2 - 1) = 8\cdot 3 = 24 > 0$$



$$f(-1) = \left((-1)^2 - 1\right)^2 = 1 \rightarrow Pto.mínimo(-1{,}0)$$
$$f(0) = \left(0^2 - 1\right)^2 = 1 \rightarrow Pto.mínimo(0{,}1)$$
$$f(1) = \left(1^2 - 1\right)^2 = 0 \rightarrow Pto.máximo(1{,}0)$$

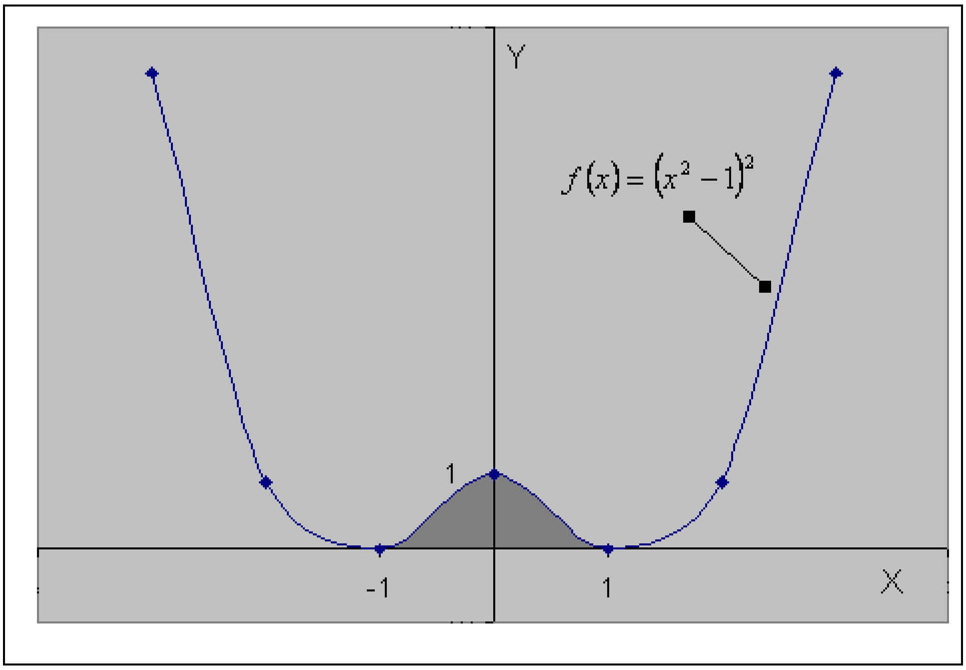
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3.

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow$$

Donde: $f'(3) = 4 \cdot 3 \cdot (3^2 - 1) = 96$ y $f(3) = (3^2 - 1)^2 = 64$ y $x_0 = 3$

Por tanto la ecuación es: $y - 64 = 96 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 96x - 224$

c)Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX



Como la gráfica tiene simetría par, la integral será dos veces la integral definida entre 0 y 1.

$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 2\cdot(x^2-1)^2 dx = 2\int_0^1 (x^4-2x^2+1)dx = 2\cdot\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^1 - 0 = 2\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)-0=\frac{16}{5}u^2$$

EJERCICIO 3.(Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento tales que:

$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{3},\quad P(C)=\frac{1}{4},\quad P(A\cup B\cup C)=\frac{2}{3},\ P(A\cap B\cap C)=0,$

$P\left(A/B\right)=P\left(C/A\right)=\frac{1}{2},$

a) Calcúlese $P(C\cap B)$.

b) Calcúlese $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$.

SOLUCION

a)Calcúlese $P(C\cap B)$.

Aplicando la fórmula:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C),$$

Donde

$P(A),\ P(B),\ P(C),\ P(A\cup B\cup C),\ P(A\cap B\cap C),$ son datos conocidos y

$P(A\cap B)=P(B\cap A)=P(B)\cdot P\left(A/B\right),$

$P(A\cap C)=P(C\cap A)=P(A)\cdot P\left(C/A\right),$

$P(B\cap C)=P(C\cap B),$

Sustituimos en la fórmula:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)\Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)-P(C\cap B)-0\Rightarrow P(C\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+0=$$

$$=\frac{8-6-4-3+2+3}{12}=\frac{0}{12}=0$$

b) $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{A\cap B\cap C})=1-P(A\cap B\cap C)=1-0=1.$

EJERCICIO 4.(Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros. a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta. b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?.

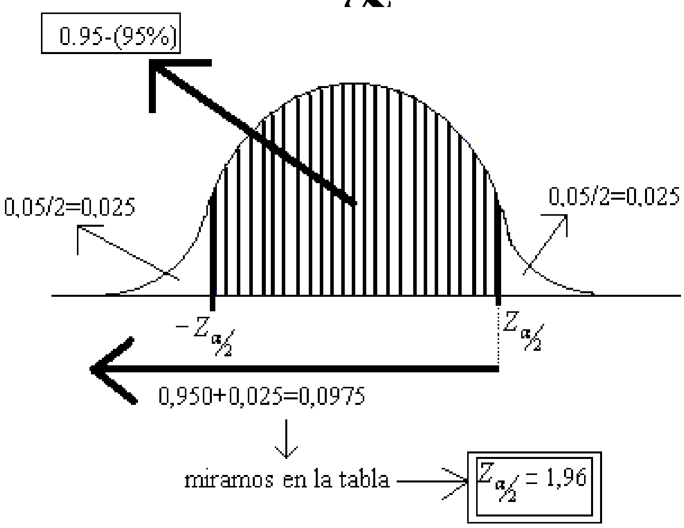
DATOS:

$\sigma = 55€$, $\mu = 320€$ $n = 81.\,familias$ y 95% de confianza

SOLUCION

a)¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta

*) Cogemos la gráfica de la distribución de probabilidad normal estandar, N(0,1) y hallamos el $\left(Z_{\alpha/2}\right)$.



$$95\%\,de.confianza \Rightarrow \left(Z_{\alpha/2}\right) = 1{,}96$$

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{Error.máximo}\right)^2 \Rightarrow Error > \sqrt{\left(\frac{\left(Z_{\alpha/2}\cdot\sigma\right)^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{(1{,}96\cdot 55)^2}{81}} = 11{,}97$$

No, el error máximo es de 11,97 euros.

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?.

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{Error.máximo} \right)^2 \Rightarrow n > \left(\frac{1{,}96 \cdot 55}{10} \right)^2 = (10{,}78)^2 = 116{,}21 \Rightarrow n = 117$$

OPCION B

EJERCICIO 1.(Puntuación máxima: 3 puntos)

Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350€ y 400€ por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas y al menos 0 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿ Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste?. Determinar dicho coste mínimo.

SOLUCION

	A	B	NECESIDADES
GASOLINA	0,1	0,05	10
FUEL-OIL	0,35	0,55	50
COSTE	350	400	

Donde: X es el número de toneladas que se compran en la refinería A.
Y es el número de toneladas que se compran en la refinería B.

Función objetivo: $F(x,y) = 350x + 400y$

Restricciones:

$$\begin{cases} y \geq 200 - 2x \\ y \geq \dfrac{1000 - 7x}{11} \\ y > 100 \\ x > 100 \end{cases}$$

Los puntos de corte se resuelven mediante la resolución de sistemas:

PTO A: $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}05y = 10 \\ y = 100 \end{cases} \rightarrow Pto.A(50{,}100)$

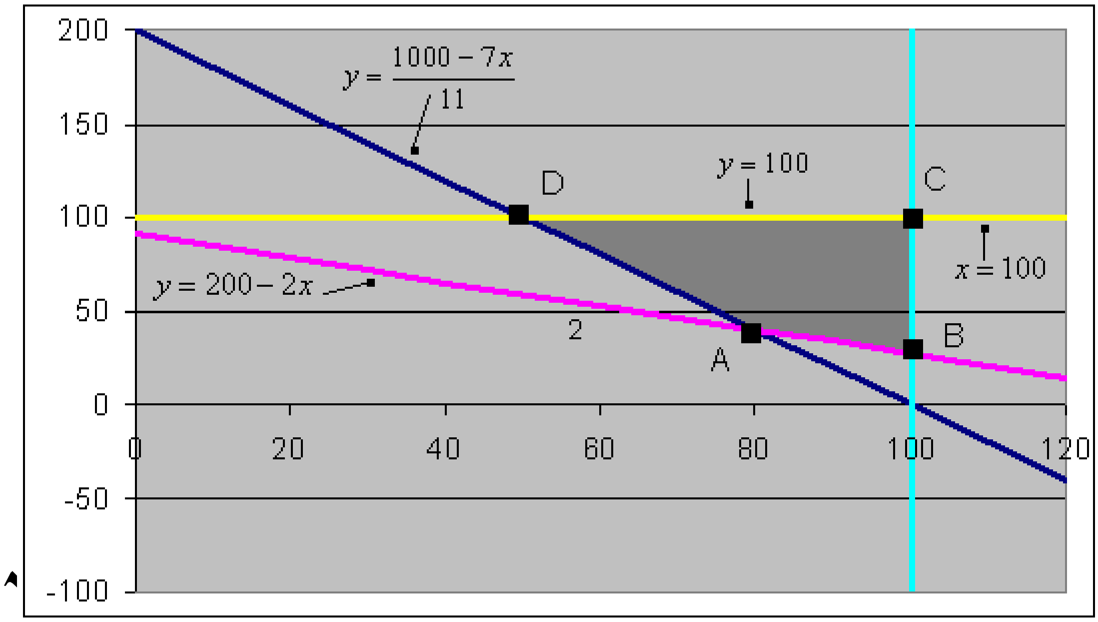
PTO B: $\begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases} \rightarrow Pto.B(100{,}100)$

PTO C: $\begin{cases} x = 100 \\ 0{,}35x - 0{,}55y = 50 \end{cases} \rightarrow Pto.C(100{,}27{,}3)$

PTO D: $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}05y = 10 \\ 0{,}35x - 0{,}55y = 50 \end{cases} (-) \rightarrow Pto.D(80{,}40)$

$$-0{,}25x + 0 = -40 \rightarrow x = \frac{-40}{-0{,}25} = 80$$

	X	Y	$F(x,y) = 350x + 400y$
$A(50{,}100)$	50	100	$F(50{,}100) = 350 \cdot 50 + 400 \cdot 100 = 57500$
$B(100{,}100)$	100	100	$F(100{,}100) = 350 \cdot 100 + 400 \cdot 100 = 75000$
$C(100{,}27{,}3)$	100	27,3	$F(100{,}27{,}3) = 350 \cdot 100 + 400 \cdot 27{,}3 = 45920$
$D(80{,}40)$	80	40	$F(80{,}40) = 350 \cdot 80 + 400 \cdot 40 = 44000$



La solución válida es las coordenadas del punto $D(80{,}40)$ con un valor de 44000€, que se obtiene comprando 80 toneladas de la refinería A y 40 toneladas de la refinería B.

EJERCICIO 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x - a}$$

a) Determínense las asíndotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asindota vertical, dos asíndotas verticales o bien no tiene asíndotas verticales.
b) Para a=-1, calcúlense los valores reales de b par los cuales se verifica que $\int_a^b f(x) \cdot dx = 0$

SOLUCION

ASINDOTAS VERTICALES: Las asíndotas verticales coinciden con los puntos no incluidos en el dominio, donde el límite vale infinito (no tiene imagen la función).

$$\lim_{x\to a}(f(x)) = \infty \rightarrow x^2 - x - a = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} = \rightarrow$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 1 + 4a = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Para $a > -\frac{1}{4}$, la función tendrá dos soluciones, por tanto, dos asíndotas verticales.

Para $a = -\frac{1}{4}$, la función tendrá una solución, por tanto, una asíndota vertical.

Para $a < -\frac{1}{4}$, la función tendrá no tendrá soluciones, por tanto, no tendrá asíndotas verticales (no existen soluciones con raíces negativas).

ASINDOTAS HORIZONTALES: Las asíndotas horizontales coinciden con el límite cuando x tiende a infinito de la función.

$$y = L \rightarrow L = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)_{x\to a} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2 - x - a}\right) = \frac{\infty}{\infty} = Ind \rightarrow$$

Rompemos la indeterminación dividiendo cada miembro por la x de mayor grado.

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{a}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}}\right) = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow X = 0$$

ASÍNDOTAS OBLICUAS: Por tener asíndotas horizontales, no tiene asíndotas oblicuas.

b)Para a=-1, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_a^b f(x) \cdot dx = 0$

$$\int_0^b \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx = Ln\left(x^2-x+1\right)\Big]_0^b = 0 \rightarrow Ln\left(b^2-b+1\right) - Ln\left(0^2-0+1\right) = 0 \rightarrow$$

$$Ln\left(b^2-b+1\right) - 0 = 0 \rightarrow Ln\left(b^2-b+1\right) = 0 \rightarrow e^{Ln\left(b^2-b+1\right)} = e^0 \rightarrow b^2-b+1 = 1 \rightarrow$$

$$b^2-b = 1-1 \rightarrow b^2-b = 0 \rightarrow b\cdot(b-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3.(Puntuación máxima: 2 puntos)

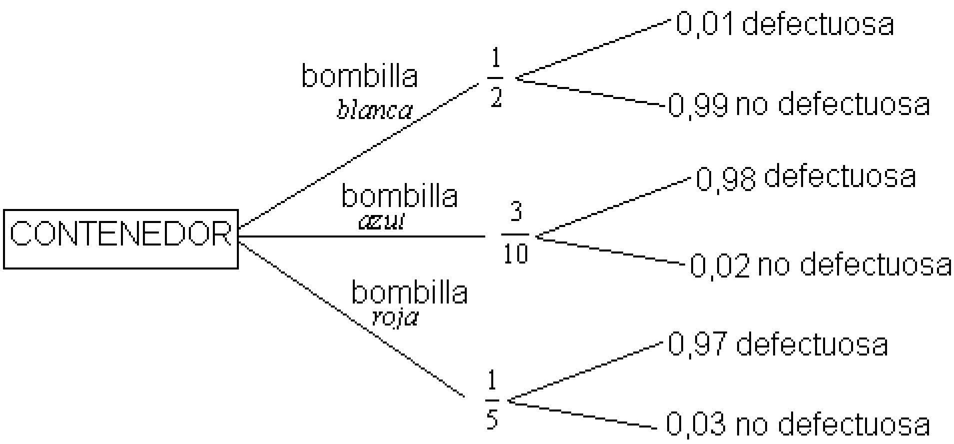
Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, es igual a 0,02, si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor:

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

SOLUCION

$$P(Bombilla.blanca) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},\ P(Bombilla.azul) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10},\ P(Bombilla.roja) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}.$$



Gráfica

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

$$P(no.funcione) = P(blanca \cap defectuosa) + P(azul \cap defectuosa) + P(roja \cap defectuosa) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}01 +$$

$$\frac{3}{10}\cdot 0{,}02 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}03 = 0{,}0177 \rightarrow 1{,}77\%$$

b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

$$P\left(\frac{Azul}{defectuosa} \right) = \frac{P(azul \cap defectuosa)}{P(defectuosa)} = \frac{3/10}{0{,}0177} = 0{,}3773 \rightarrow 37{,}73\%$$

Ejercicio 4.(Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la cantidad de agua en litros recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros): 9,1 - 4,9 - 7,3 - 2,8 - 5,5 - 6,0 - 3,7 - 8,6 - 4,5 - 7,6. a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%. b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98%.

<u>DATOS:</u>

$\sigma = 2 litros$, $n = 10$ y 95% de confianza

<u>SOLUCION</u>

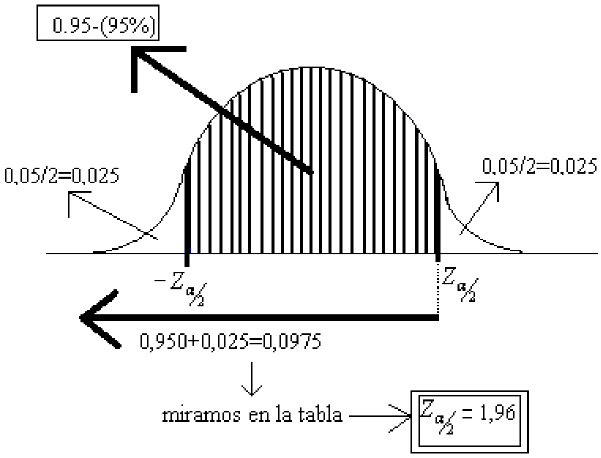
a)Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.

$N(\mu, \sigma) = N(6;2)$

$\overline{X} = \left(\frac{9{,}1 + 4{,}9 + 7{,}3 + 2{,}8 + 5{,}5 + 6{,}0 + 3{,}7 + 8{,}6 + 4{,}5 + 7{,}6}{10} \right) litros = 37{,}5 litros$ y 95% de confianza.

$$Intervalo.de.Confianza = I.C = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

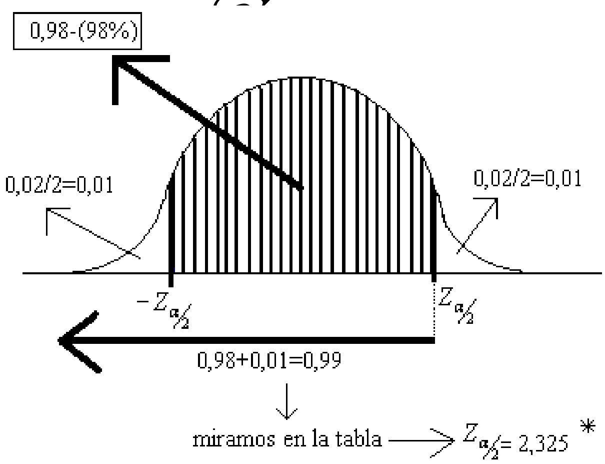
Cogemos la gráfica de la distribución de probabilidad normal estandar, N(0,1) y hallamos el $\left(Z_{\alpha/2} \right)$.



Sustituimos en la fórmula del Intervalo de Confianza:

$$\Rightarrow I.C = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(6 \pm 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (6 \pm 1,24) = (6 - 1,24; 6 + 1,24) = (4,76; 7,24)$$

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98%.



* El valor 0,995 está entre los valores $\Rightarrow \left.\begin{cases} P(\overline{X} = 2,32) \rightarrow 0,9898 \\ P(\overline{X} = 2,33) \rightarrow 0,9901 \end{cases}\right\} 0,99$

$$\Rightarrow Z_{\alpha/2} = \frac{2,32 + 2,33}{2} = 2,325$$

Sustituimos en la fórmula que relaciona el Intervalo de Confianza y el Error:

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{Error.máximo}\right)^2 \Rightarrow n > \left(\frac{2,325 \cdot 2}{1}\right)^2 = (4,65)^2 = 21,62 \Rightarrow n = 22$$