1.- Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+24 & si \quad x\le 3 \\ x^2+9 & si \quad -3<x<2 \\ -x+15 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función f.

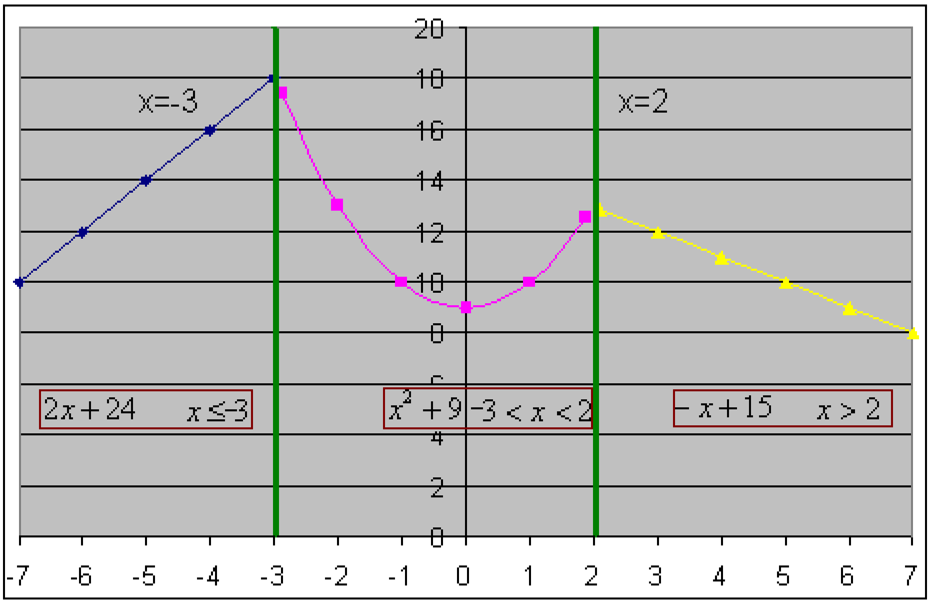
Tabla de valores:

| x | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |

| x | -2,9 | -2 | -1 | 0 | 1 | 1,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 17,41 | 13 | 10 | 9 | 10 | 12,61 |

| x | 2,1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 12,9 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 |

Gráfica:




b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1.

$$y-f(x)=f'(x)\cdot(x-x_0)\Rightarrow y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$

Donde: $f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2\cdot 1=2$, $f(x)=x^2+9\Rightarrow f(1)=1^2+9=10$

Sustituimos en la ecuación punto tangente:

$$y-10=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x+8$$

2.- Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\left(x^2-1\right)^2$$

a) Determínese los extremos relativos de f. (esbozar su gráfica).

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3.

a)Los máximos y mínimos se localizan cuando:

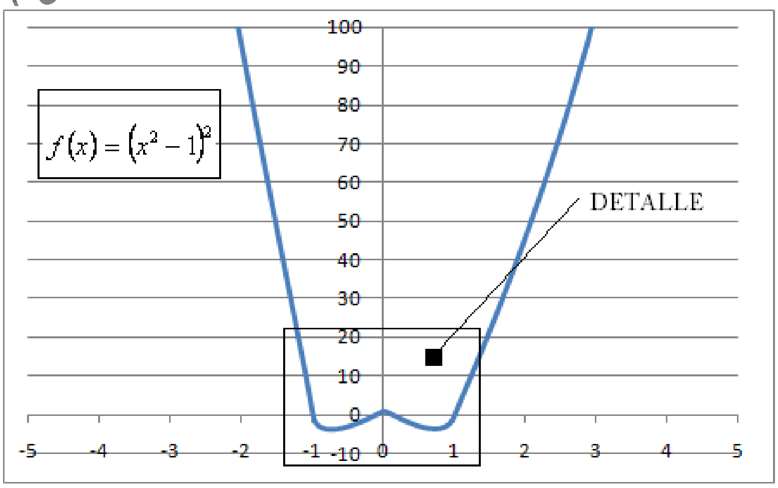
$$f'(x)=0\rightarrow\begin{cases} f''(b)<0 & \rightarrow Pto(b, f(b)\quad Máximo \\ f''(c)>0 & \rightarrow Pto(c, f(c))\quad ´Mínimo \end{cases}$$

$$f'(x)=2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2x=4x\cdot\left(x^2-1\right)\Rightarrow\begin{cases} 2x=0 & \rightarrow x_1=0 \\ x^2-1=0,\ x=\pm\sqrt{1}\rightarrow & x_2=-1 \\ & x_3=1 \end{cases}$$

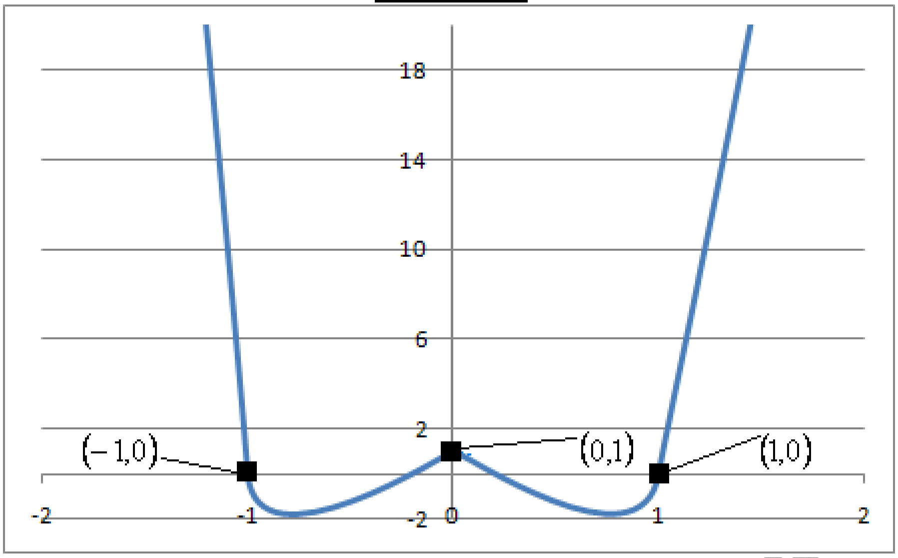
$$f''(x)=4\cdot\left(3x^2-1\right)\Rightarrow\begin{cases} f''(-1)=4\cdot\left(3\cdot(-1)^2-1\right)=8>0\rightarrow mínimo \\ f''(0)=4\cdot\left(3\cdot 0^2-1\right)=-4<0\quad\rightarrow máximo \\ f''(1)=4\cdot\left(3\cdot 1^2-1\right)=8>0\quad\rightarrow mínimo \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(-1)=\left(x^2-1\right)^2=0\rightarrow PUNTO_{mínimo}(-1,0) \\ f(0)=\left(x^2-1\right)^2=1\quad\rightarrow PUNTO_{máximo}(0,1) \\ f(1)=\left(x^2-1\right)^2=0\quad\rightarrow PUNTO_{mínimo}(1,0) \end{cases}$$

**GRAFICA**



**DETALLE**




c) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3.

$$y - f(x) = f'(x)\cdot(x - x_0) \Rightarrow y - f(3) = f'(1)\cdot(x-3)$$

Donde: $f'(x) = 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x \Rightarrow f'(3) = 2\cdot(3^2-1)\cdot 2\cdot 3 = 96$, $f(3) = (3^2-1)^2 = 64$

Sustituimos en la ecuación punto tangente:

$$y - 64 = 96\cdot(x-3) \Rightarrow y = 96\cdot x - 224$$

3.- Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 + a\cdot x^2 + b\cdot x$$

a) ¿ Qué valores deben tomar a y b para que f tenga un máximo relativo en el punto(1,4)?

- Si existe un máximo, entonces pertenece a la función el punto (1,4): $f(1) = 1^3 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 = 4 \Rightarrow a + b = -1$
- Para que el punto P sea máximo, se tiene que cumplir las siguientes condiciones:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} f''(b) < 0 \ \rightarrow Pto(b, f(b) \ \ Máximo \\ \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + a\cdot x^2 + b\cdot x \Rightarrow$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow f'(1) = 3\cdot 1^2 + 2\cdot a\cdot 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$$

Con las ecuaciones hacemos un sistema para hallar los parámetros a y b:

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+b=-3 \rightarrow b=-3-2a \\ a+b=-1 \rightarrow b=-1-a \end{array}\right] \rightarrow -3-2a=-1-a \rightarrow a=-2 \rightarrow b=-1-(-2)=1$$

b)Para a=-2 y b=8, determínense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y determínense los puntos de inflexión de dicha gráfica de f y el eje OX

$$f(x)=x^3-2x^2+8x$$

**Puntos de corte:**

**EJE X**

$$\rightarrow f(x)=0 \rightarrow f(x)=x^3-2x^2+8x=x\cdot\left(x^2-2x+8\right)=0 \rightarrow \begin{array}{l} x_1=0 \Rightarrow PTO(0,0) \\ * x^2-2x+8=0 \Rightarrow NO.CORTA \end{array}$$

$$* x^2-2x+8=0 \Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-28}}{2} \rightarrow NO.CORTA$$

**EJE Y**

$$\rightarrow x=0 \rightarrow f(x)=0^3-2\cdot0^2+8\cdot0=0 \Rightarrow PTO(0,0)$$

Ptos de inflexión:

$$f(x)=x^3-2x^2+8x \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+8 \Rightarrow f''(x)=6x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$f'''(x)=6$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{16}{3}=\frac{8-24+144}{27}=\frac{128}{27}=4{,}74$$

$$m.c.m(3,9,27)=27$$

**PTO de INFLEXION**: $\left(\frac{2}{3},\frac{127}{28}\right)$

4.-Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

a) Determínense las asíndotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asidota vertical, dos asíndotas verticales o bien no tiene asíndotas verticales.

**ASINDOTAS VERTICALES**: Las asíndotas verticales coinciden con los puntos no incluidos en el dominio, donde el límite vale infinito (no tiene imagen la función)

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=\infty \to x^2-x-a=0 \to x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-a)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta=0 \to 1+4a=0 \to a=-\frac{1}{4}$$

Para $a>-\frac{1}{4}$, la función tendrá dos soluciones, por tanto, dos asíndotas verticales.

Para $a=-\frac{1}{4}$, la función tendrá una solución, por tanto, una asíndota vertical.

Para $a<-\frac{1}{4}$, la función tendrá no tendrá soluciones, por tanto, no tendrá asíndotas verticales( no existen soluciones con raíces negativas).

**ASINDOTAS HORIZONTALES:** Las asíndotas horizontales coinciden con el límite cuando x tiende a infinito de la función.

$y=L \to L=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2-x-a}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind \to$ Rompemos la indeterminación dividiendo cada miembro por la x de mayor grado.

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{a}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}}\right)=\frac{0}{1}=0 \to X=0$$

**ASÍNDOTAS OBLICUAS**: Por tener asíndotas horizontales, no tiene asíndotas oblicuas.

b)Para a=-1, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_a^b f(x)\cdot dx=0$

$$\int_0^b\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx=Ln\left(x^2-x+1\right)\Big]_0^b=0 \to Ln\left(b^2-b+1\right)-Ln\left(0^2-0+1\right)=0 \to$$

$$Ln\left(b^2-b+1\right)-0=0 \to Ln\left(b^2-b+1\right)=0 \to e^{Ln\left(b^2-b+1\right)}=e^0 \to b^2-b+1=1 \to$$

$$b^2-b=1-1 \to b^2-b=0 \to b\cdot(b-1)=0 \to \begin{cases} b_1=0 \\ b_2=1 \end{cases}$$

5.- Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4}$$

a)Determínense las asíndotas de f.

b)Calcúlense los máximos y mínimos relativos de f y determínense sus intervalos de crecimiento

c)Calcúlese la integral definida

**SOLUCIÓN**

a)Determínense las asíndotas de f.

**ASINDOTAS VERTICALES**: Las asíndotas verticales coinciden con los puntos no incluidos en el dominio, donde el límite vale infinito (no tiene imagen la función).

----Denominador igual a cero

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=\infty \to \lim_{x\to a}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)=\infty \to x^2-4=0 \to x^2=4 \to x=\sqrt{4} \to x=\pm 2$$

Para $x=-2 \to \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)=\frac{8}{0}=\infty$, Hay una asíndota vertical en $x=-2$

Para $x=2 \to \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)=\frac{8}{0}=\infty$, Hay una asíndota vertical en $x=2$

**ASINDOTAS HORIZONTALES:** Las asíndotas horizontales coinciden con el límite cuando x tiende a infinito de la función.

$y=L \to y=\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\to a}}\left(f(x)\right)=L \to y=\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\to a}}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind \to$ Aplico L´Hopital.

$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind \to$ Aplico L´Hopital. $L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{2}\right)=1=Ind \to Y=1$

**ASÍNDOTAS OBLICUAS**: Por tener asíndotas horizontales, no tiene asíndotas oblicuas.

b)Calcúlense los máximos y mínimos relativos de f y determínense sus intervalos de crecimiento

Los máximos y mínimos se localizan cuando:

$$f'(x)=0 \to \begin{cases} f''(b)<0 & \to Pto(b, f(b)) \quad Máximo \\ f''(c)>0 & \to Pto(c, f(c)) \quad Mínimo \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-12x}{(x^2-4)^2}=0 \to -12x=0 \to x=0$$

Hallamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f'(x)=\frac{-12x}{\left(x^2-4\right)^2}=0\rightarrow f'(-2)=\frac{-12\cdot(-2)}{\left((-2)^2-4\right)^2}>0\rightarrow \text{CRECE}$$

$$f'(x)=\frac{-12x}{\left(x^2-4\right)^2}=0\rightarrow f'(2)=\frac{-12\cdot 2}{\left(2^2-4\right)^2}<0\rightarrow \text{DECRECE}$$

La función: $\begin{matrix}(-\infty,0)\rightarrow & CRECE\\ (0,+\infty)\rightarrow & DECRECE\end{matrix}$

Por tanto tiene un máximo en el punto X=0

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4}\Rightarrow f(0)=\frac{\left(0^2+2\right)}{\left(0^2-4\right)^2}=\frac{0+2}{0-4}=\frac{-1}{2}\rightarrow PTO_{MÁXIMO}\left(0,-\frac{1}{2}\right)$$

c)Calcúlese la integral definida: $\int_3^5\left(x^2-4\right)\cdot f(x)dx$

$$\int_3^5\left(x^2-4\right)\cdot\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)dx=\int_3^5\left(x^2+2\right)dx=\frac{x^3}{3}+2x\Big]_3^5=\left(\frac{5^3}{3}+2\cdot 5\right)-\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot 3\right)=\frac{110}{3}u^2$$

6.-Sea la función $f(x)=2x^3-21x^2+60x-32$. Hallar sus máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y representar la gráfica.

Los máximos y mínimos se localizan cuando:

$$f'(x)=0\rightarrow\begin{cases}f''(b)<0 & \rightarrow Pto(b,f(b))\ \ Máximo\\ f''(c)>0 & \rightarrow Pto(c,f(c))\ \ ´Mínimo\end{cases}$$

$$f(x)=2x^3-21x^2+60x-32\Rightarrow f'(x)=6x^2-42x+60=0\Rightarrow$$

$$*6x^2-42x+60=0\rightarrow x^2-7x+10=0\rightarrow$$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{7+3}{2}=\frac{10}{2}=5\\ x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$$

$$f''(x)=2x-7=0\rightarrow\begin{cases}f''(x)<0\rightarrow MIN\Rightarrow f'(2)=2\cdot 2-7=-3<0\rightarrow MÁXIMO\\ f''(x)>0\rightarrow MAX\Rightarrow f'(5)=2\cdot 5-7=3>0\rightarrow MÍNIMO\end{cases}$$

Hallamos la coordenada y del punto máximo y mínimo.

$$f(x)=2x^3-21x^2+60x-32$$

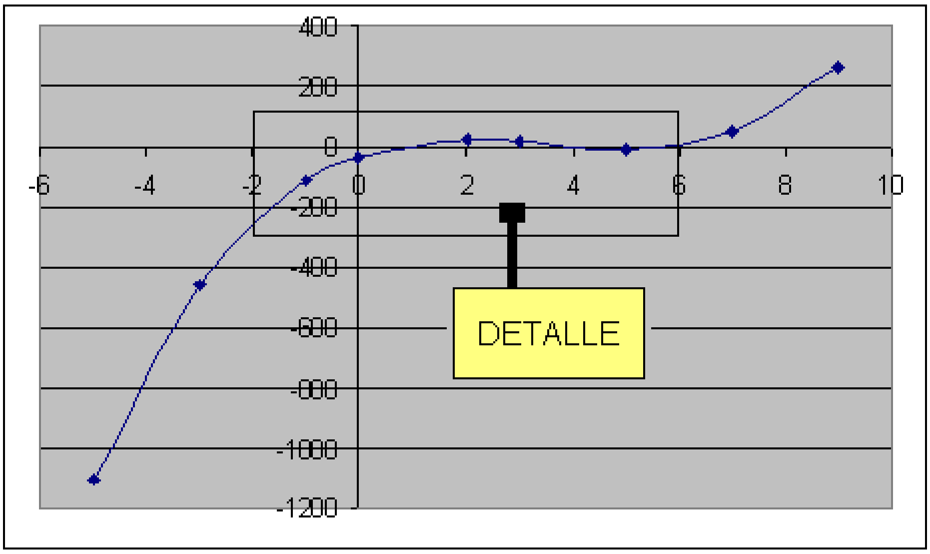
$$\Rightarrow \begin{array}{l} f'(2) = 2{\cdot}2^3 - 21{\cdot}2^2 + 60{\cdot}2 - 32 = 16 - 84 + 120 - 32 = 20 \Rightarrow MÁXIMO \rightarrow PTO(2,20) \\ f'(5) = 2{\cdot}5^3 - 21{\cdot}5^2 + 60{\cdot}5 - 32 = 250 - 525 + 300 - 32 = -7 \Rightarrow MÍNIMO \rightarrow PTO(5,-7) \end{array}$$

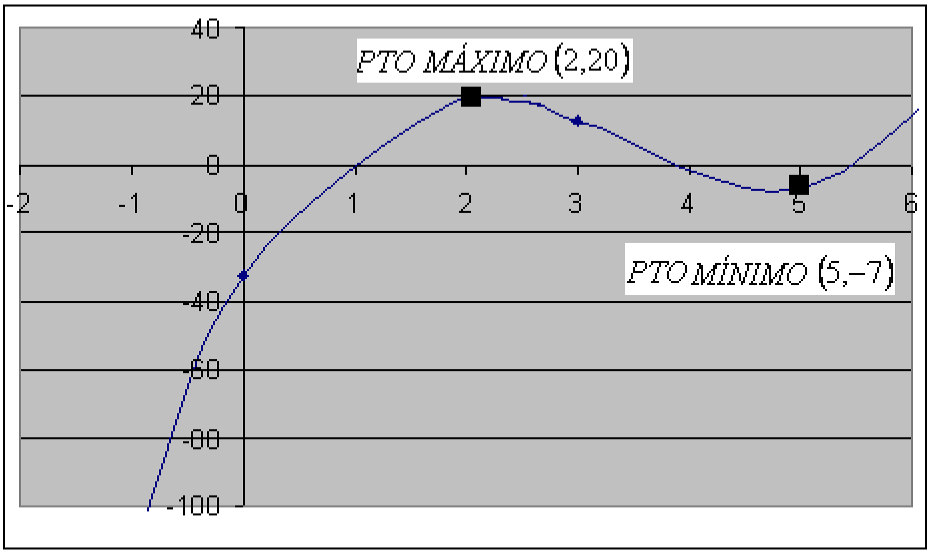
$$f'(x) = x^2 - 7x + 10 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0^2 - 7{\cdot}0 + 10 = 10 > 0 \rightarrow CRECIMIENTO \\ f'(3) = 3^2 - 7{\cdot}3 + 10 = -2 < 0 \rightarrow DECRECIMIENTO \\ f''(9) = 9^2 - 7{\cdot}9 + 10 = 28 > 0 \rightarrow CRECIMIENTO \end{cases}$$

$$\begin{cases} CRECIMIENTO \rightarrow (-\infty,2) \cup (5,+\infty) \\ DECRECIMIENTO \rightarrow (2,5) \end{cases}$$

GRÁFICA:

Nos ayudamos de una tabla de valores:




DETALLE

7.- Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x}, x\neq 0$. Determinar las asíndotas de la función. Calcular los máximos y mínimos relativos y determinar sus intervalos de crecimiento. (esbozar su gráfica)

Los máximos y mínimos se localizan cuando:

$$f^{/}(x)=0\rightarrow\begin{cases} f^{//}(b)<0 & \rightarrow Pto(b, f(b)\quad Máximo \\ f^{//}(c)>0 & \rightarrow Pto(c, f(c))\quad ´Mínimo \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x}\Rightarrow f^{/}(x)=\frac{(2x+1)\cdot x-1\cdot(x^2+x+2)}{x^2}=\frac{2x^2+x-x^2-x-2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}=0\Rightarrow$$

$$x^2-2=0\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\rightarrow \begin{matrix} x_1=+\sqrt{2} \\ x_2=-\sqrt{2}\end{matrix}$$

$$f^{//}(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3+4x}{x^4}=\frac{4x}{x^4}=\frac{4}{x^3}\rightarrow$$

$$\begin{cases} f^{//}(x)>0\rightarrow MIN\Rightarrow f^{/}(\sqrt{2})=\dfrac{4}{(\sqrt{2})^3}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}>0\rightarrow MÍNIMO \\ f^{//}(x)<0\rightarrow MAX\Rightarrow f^{/}(-\sqrt{2})=\dfrac{4}{(-\sqrt{2})^3}=\dfrac{4}{-2\sqrt{2}}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}<0\rightarrow MÁXIMO \end{cases}$$

Hallamos la coordenada y del punto máximo y mínimo.

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x}$$

$$f^{/}(\sqrt{2})=\frac{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(4+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}+2}{2}=$$
$$2\sqrt{2}+1\Rightarrow MÍNIMO\rightarrow PTO(\sqrt{2},2\sqrt{2}+1)$$

$\Rightarrow$

$$f^{/}(-\sqrt{2})=\frac{(-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+2}{-\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(4-\sqrt{2})}{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-2}{-2}=$$
$$-2\sqrt{2}+1\Rightarrow MÁXIMO\rightarrow PTO(-\sqrt{2},-2\sqrt{2}+1)$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2}{x^2}\Rightarrow\begin{cases} f'(-2)=\dfrac{(-2)^2-2}{(-2)^2}=\dfrac{4-2}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}>0\rightarrow CRECIMIENTO \\ f'(-1)=\dfrac{(-1)^2-2}{(-1)^2}=\dfrac{1-2}{1}=\dfrac{-1}{2}<0\rightarrow DECRECIMIENTO \\ f''(1)=\dfrac{1^2-2}{1^2}=\dfrac{1-2}{1}=-1<0\rightarrow DECRECIMIENTO \\ f(2)=\dfrac{2^2-2}{2^2}=\dfrac{4-2}{4}=\dfrac{1}{2}>CRECIMIENTO \end{cases}$$

$$\begin{cases} CRECIMIENTO\rightarrow\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right) \\ DECRECIMIENTO\rightarrow\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Hallamos las asíndotas de la función:

**ASINDOTAS VERTICALES**: Las asíndotas verticales coinciden con los puntos no incluidos en el dominio, donde el límite vale infinito (no tiene imagen la función).
----Denominador igual a cero

$$\underset{x\to a}{Lim}\left(f(x)\right)=\infty\rightarrow\underset{x\to a}{Lim}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2}\right)=\infty\rightarrow x^2=0\rightarrow x^2=0\rightarrow x=0$$

Para $x=0\rightarrow\underset{x\to -2}{Lim}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2}\right)=\frac{2}{0}=\infty$, Hay una asíndota vertical en $x=0$

**ASINDOTAS HORIZONTALES:** Las asíndotas horizontales coinciden con el límite cuando x tiende a infinito de la función.

$y=L\rightarrow y=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\underset{x\to a}{f(x)}\right)=L\rightarrow y=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\underset{x\to a}{f(x)}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x^2+x+2}{x}\right)=\frac{\infty^2}{\infty}=\infty$, NO tiene asíndota horizontal

**ASÍNDOTAS OBLICUAS**:

$$y=mx+n\rightarrow y=1\cdot x+1=x+1$$

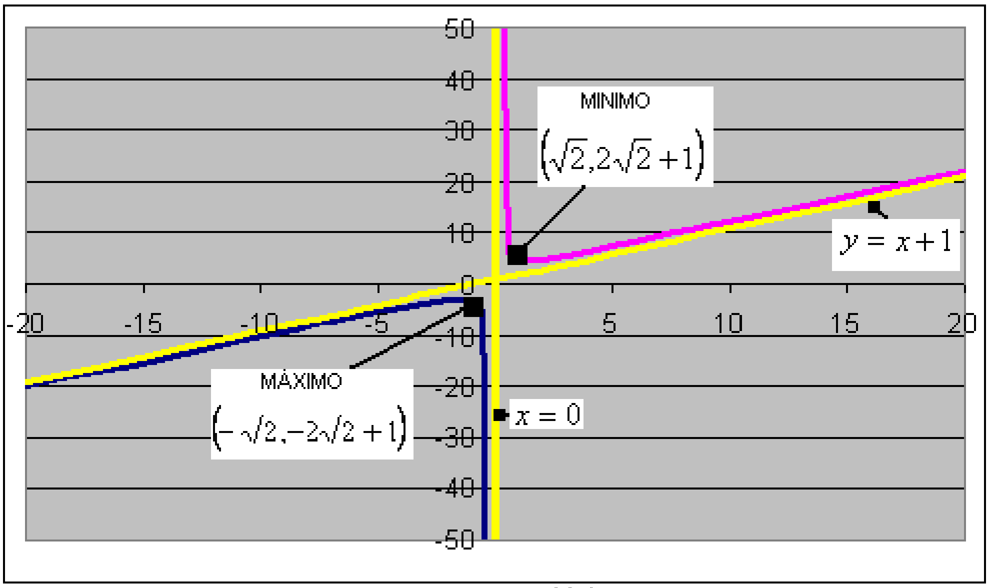
$$m=\rightarrow\underset{x\to\infty\infty}{Lim}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{\frac{x^2+x+2}{x}}{x}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind\rightarrow\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=Ind\rightarrow\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{2}{2}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}(1)=1$$

$$n \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind$$

$$\to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}(1)=1$$

**GRAFICA**




7.- Sea la función $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3}$. Determinar las asíndotas de la función. Calcular los máximos y mínimos relativos y determinar sus intervalos de crecimiento. (esbozar su gráfica)

Los máximos y mínimos se localizan cuando:

$$f'(x)=0 \to \begin{cases} f''(b)<0 & \to Pto(b, f(b)) \quad Máximo \\ f''(c)>0 & \to Pto(c, f(c)) \quad Mínimo \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+3)-(x-3)^2}{(x+3)^2}=\frac{2\cdot(x+3)\cdot(x-3)-(x-3)^2}{(x+3)^2}=$$

$$\frac{2x^2-18-x^2-9+6x}{x+3}=\frac{2x-6-x^2-9+6x}{x+3}=\frac{x^2+6x-27}{x+3}=0 \Rightarrow x^2+6x-27=0 \to$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(1)\cdot(-27)}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm\sqrt{36+108}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{-6\pm 12}{2} \Longrightarrow \begin{matrix} x_1=\frac{-6-12}{-2}=\frac{-18}{2}=-9 \\ x_2=\frac{-6+12}{-2}=\frac{6}{2}=3 \end{matrix}$$

$f'(x) = \frac{x^2+6x-27}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-3)\cdot(x+9)}{x+3}$

$$\begin{cases} f'(-10) = \frac{(+)\cdot(-)}{(-)} = \frac{(-)}{(-)} = (+) > 0 \rightarrow CRECIMIENTO \\ f'(-1) = \frac{(-)\cdot(+)}{(-)} = \frac{(-)}{(-)} = (-) < 0 \rightarrow DECRECIMIENTO \\ f'(1) = \frac{(-)\cdot(+)}{(+)} = \frac{(-)}{(-)} = (-) < 0 \rightarrow DECRECIMIENTO \\ f'(5) = \frac{(+)\cdot(+)}{(+)} = \frac{(+)}{(+)} = (+) > CRECIMIENTO \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+6)\cdot(x+3)-(x^2+6x-27)}{x+3} = \frac{2x^2+6x+6x+18-x^2-6x+27}{x+3} = \frac{x^2+6x+45}{x+3} = \rightarrow$$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \rightarrow MIN \Rightarrow f'(3) = \frac{3^2+6\cdot 3+45}{3+3} = \frac{9+18+45}{6} = \frac{72}{6} = 12 > 0 \rightarrow MÍNIMO \\ f''(x) < 0 \rightarrow MAX \Rightarrow f'(-9) = \frac{(-9)^2+6\cdot(-9)+45}{-9+3} = \frac{81-54+45}{-6} = \frac{72}{-6} = -12 < 0 \rightarrow MÁXIMO \end{cases}$$

Hallamos la coordenada y del punto máximo y mínimo.

$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} f(3) = \frac{(3-3)^2}{3+3} = \frac{0^2}{6} = 0 \Rightarrow MÍNIMO \rightarrow PTO(3,0) \\ f'(-9) = \frac{(-9-3)^2}{-9+3} = \frac{(-12)^2}{-6} = \frac{144}{-6} = -24 \Rightarrow MÁXIMO \rightarrow PTO(-9,-24) \end{array}$$

$$\begin{cases} CRECIMIENTO \rightarrow (-\infty,-9) \cup (3,+\infty) \\ DECRECIMIENTO \rightarrow (-9,-3) \cup (-3,3) \end{cases}$$

Hallamos las asíndotas de la función:

**ASINDOTAS VERTICALES**: Las asíndotas verticales coinciden con los puntos no incluidos en el dominio, donde el límite vale infinito (no tiene imagen la función).
----Denominador igual a cero

$$\lim_{x\to a}(f(x)) = \infty \rightarrow \lim_{x\to a}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}\right) = \infty \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3$$

http://apruebalasmates.blogspot.com

Para $x=-3 \rightarrow \underset{x\to -2}{Lim}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}\right)=\frac{(-6)^2}{0}=\frac{36}{0}=\infty$, Hay una asíndota vertical en $x=-3$

**ASINDOTAS HORIZONTALES:** Las asíndotas horizontales coinciden con el límite cuando x tiende a infinito de la función.

$y=L \rightarrow y=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\underset{x\to a}{f(x)}\right)=L \rightarrow y=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\underset{x\to a}{f(x)}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}\right)=\frac{\infty^2}{\infty}=\infty$, NO tiene asíndota horizontal

**ASÍNDOTAS OBLICUAS**:

$y=mx+n \rightarrow y=1\cdot x-9=x-9$

$$m=\rightarrow \underset{x\to\infty\infty}{Lim}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{\frac{(x-3)^2}{x+3}}{x}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{(x-3)^2}{x\cdot(x+3)}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind\rightarrow \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{2\cdot(x-3)}{2x+3}\right)$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=Ind\rightarrow \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{2}{2}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}(1)=1$$

$$n=\rightarrow \underset{x\to\infty\infty}{Lim}\left(f(x)-mx\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}-x\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{(x-3)^2-x\cdot(x-3)}{x+3}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x^2-6x+9+x^2-3x}{x+3}\right)=$$

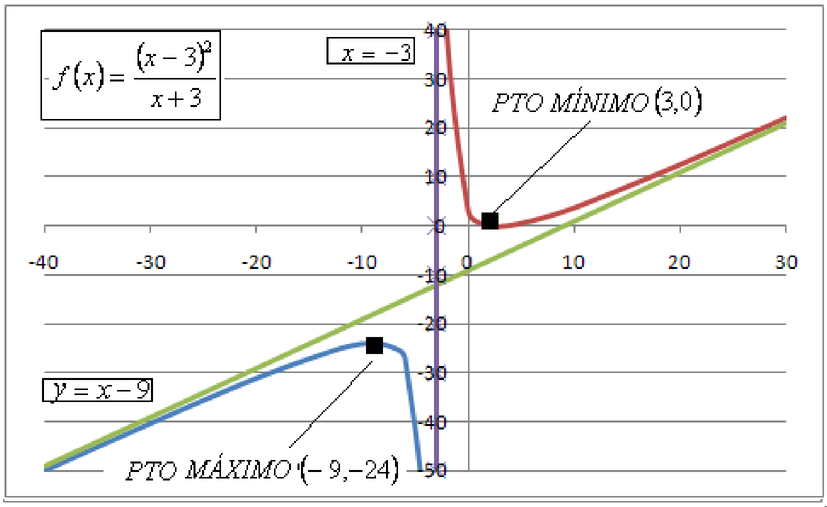
$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{-9x+9}{x+3}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind\rightarrow \underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{-9}{1}\right)=\underset{x\to\infty}{Lim}(-9)=-9$$

**<u>GRAFICA.</u>**

Para hacer la gráfica me ayudo de los puntos de corte con los ejes.

$$EJE.X \Rightarrow y=0 \rightarrow f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3}=0\rightarrow (x-3)^2=0\rightarrow x-3=0\rightarrow x=3\Rightarrow PTO(3,0)$$

$$EJE.Y \Rightarrow x=0 \rightarrow f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3}=\frac{(0-3)^2}{0+3}=\frac{9}{3}=3\Rightarrow PTO(0,3)$$




8.- Sea $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$

a) Hallar el dominio

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular las asíndotas y esbozar su gráfica.

**SOLUCION**

a)Dominio= R-{denominador=0}

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\rightarrow$$

$$*\,x^2-3x+2=0\rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2\\ x_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

$$Dominio=R-\{1,2\}$$

b)Estudiar su continuidad:

Los puntos con discontinuidad coinciden con los puntos donde no están definidos los puntos (puntos del dominio).

Por tanto la función es continua en todo R excepto en X=1 y X=2.

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{x}{x-2}$$

Estudiamos el tipo de discontinuidad en X=1:

Hallamos la imagen en el punto indicado:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{1-1}{1-3+2} = \frac{0}{0} = Ind \to \lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)} = \frac{1}{(1-2)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Hallamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-2} = \frac{1^-}{1^- -2} = \frac{0.99}{0.99-2} = \frac{0.99}{-1.01} = -0.98 \approx -1$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-2} = \frac{1^+}{1^+ -2} = \frac{1.01}{1.01-2} = \frac{1.01}{-0.99} = -1.02 \approx -1$$

Comparamos los límites por la izquierda y la derecha y no coinciden, pero en X=1 la función no existe, por tanto:

**Es discontinua evitable.**

Estudiamos el tipos de discontinuidad en X=2:

Hallamos la imagen en el punto indicado:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{2^2-2}{2^2-3\cdot 2+2} = \frac{4-2}{4-6+2} = \frac{2}{0} = \infty \to$$

Hallamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2} = \frac{2^-}{2^- -2} = \frac{1.99}{1.99-2} = \frac{1.99}{-0.01} = -199 \approx -\infty$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2} = \frac{2^+}{2^+ -2} = \frac{2.01}{2.01-2} = \frac{2.01}{0.01} = 201 \approx \infty$$

Comparamos los límites por la izquierda y la derecha y no coinciden, la función tiene un salto infinito en X=2:

**Es discontinua de salto infinito.**

c)Calcular las asíndotas y esbozar su gráfica.

**ASINDOTAS HORIZONTALES:** Las asíndotas horizontales coinciden con el límite cuando x tiende a infinito de la función.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)=\infty \to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind \to \text{Regla de L´Hopital}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind \to \text{ Regla de L´Hopital } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow Y=1$$

**ASINDOTAS VERTICALES**: Las asíndotas verticales coinciden con los puntos no incluidos en el dominio, donde el límite vale infinito (no tiene imagen la función).

----Denominador igual a cero

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=\infty \to \lim_{x\to a}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\right)=\infty \to x^2-3x+2=0 \to$$

$$*\,x^2-3x+2=0 \to x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\to\begin{cases} x_1=\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$

Para $x=2 \to \lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\right)=\frac{2^2-2}{2^2-3\cdot2+2}=\frac{2}{0}=\infty$ ,Hay una asíndota vertical en $x=2$

Para $x=1 \to \lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\right)=\frac{1^2-2}{1^2-3\cdot1+2}=\frac{1-2}{1-3+2}=\frac{-1}{0}=-\infty$ , No hay una asíndota vertical en $x=1$

**ASÍNDOTAS OBLICUAS**:

No hay porque hay asíndotas horizontales

**<u>GRAFICA:</u>**

Hallo los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y puntos de corte con los ejes para dibujar la gráfica.

<u>a.-Puntos de corte con los Ejes</u>

$$EJE.X \Rightarrow y=0 \to f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=0 \to x^2-x=0 \to x\cdot(x-1)=0 \to \begin{matrix} x_1=0 \Rightarrow PTO_1(0,0) \\ x_2=1 \Rightarrow PTO_2(1,0) \end{matrix}$$

$$EJE.Y \Rightarrow x=0 \to f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{0^2-0}{0^2-3\cdot0+2}=\frac{0}{-1}=0 \Rightarrow PTO_3(0,0)$$

<u>b.-Intervalos de crecimiento y decrecimiento,(máximos y mínimos).</u>

Los máximos y mínimos se localizan cuando:

http://apruebalasmates.blogspot.com

$$f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases} f''(b)<0 & \rightarrow Pto(b, f(b)) \quad Máximo \\ f''(c)>0 & \rightarrow Pto(c, f(c)) \quad ´Mínimo \end{cases}$$

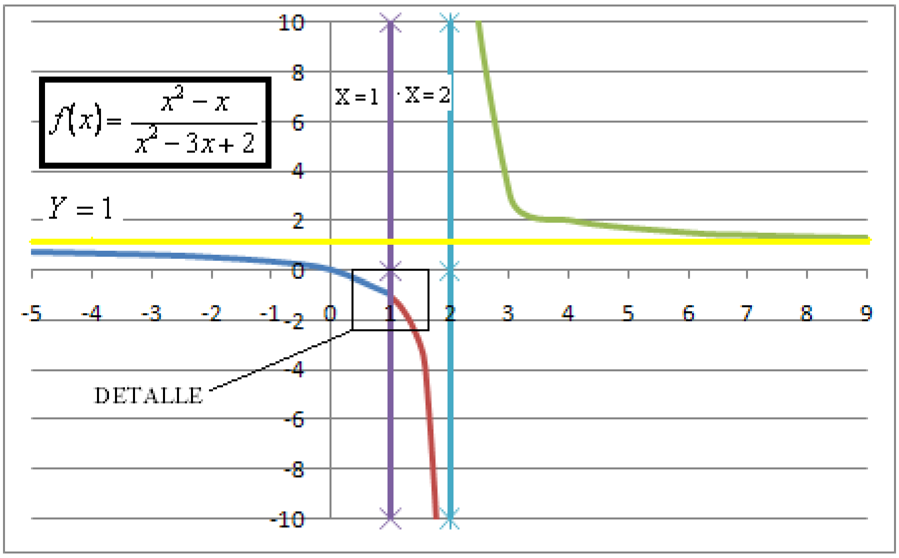
$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{x}{x-2}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{x}{x-2}\Rightarrow$$

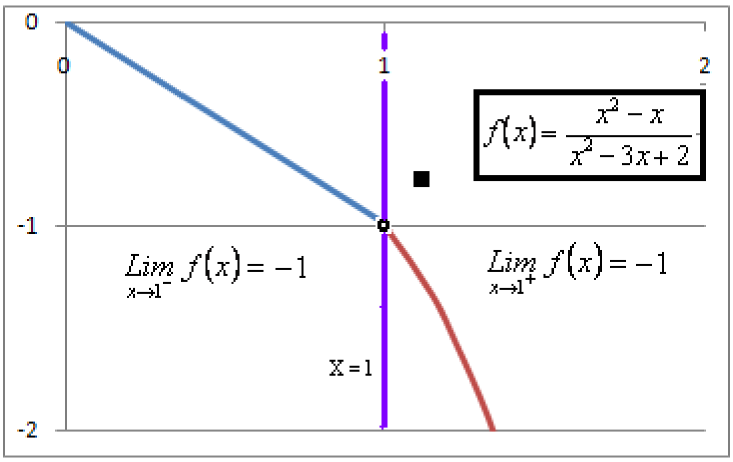
$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-2)-x\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x}{(x-2)^2}=\frac{-2}{(x-2)^2}=\frac{(-)}{(+)}<0$$

La función siempre es decreciente. No tiene ni máximos ni mínimos.

$$\begin{cases} DECRECIMIENTO \rightarrow (-\infty,+\infty) \\ CRECIMIENTO \rightarrow NUNCA \end{cases}$$




DETALLE



http://apruebalasmates.blogspot.com

9.- Sea $f(x)=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$

a) Hallar el dominio
b) Estudiar su continuidad.
c) Calcular las asíndotas y esbozar su gráfica.

**SOLUCION**

a)Dominio= R-{denominador=0}

$$f(x)=\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\rightarrow$$
$$*\,2x^2+2x-12=0\rightarrow$$

$$x^2+x-6=0\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\ x_2=\dfrac{-1-5}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

$$Dominio=R-\{-3,2\}$$

b)Estudiar su continuidad:

Los puntos con discontinuidad coinciden con los puntos donde no están definidos los puntos (puntos del dominio).
Por tanto la función es continua en todo R excepto en X=-3 y X=2.

$$f(x)=\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$$

Estudiamos el tipo de discontinuidad en X=-3:

Hallamos la imagen en el punto indicado:

$$\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}=\frac{(-3)^3+1}{2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)-12}=\frac{-26}{18-6-12}=\frac{-26}{0}=-\infty\rightarrow$$

Hallamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to-3^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}=\frac{-(-3^-)^3+1}{2\cdot(-3^-)^2+2\cdot(-3^-)-12}=\frac{-26}{17.98-5.98-12}=\frac{-26}{-0.01}=2600\approx+\infty$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} = \frac{-\left(-3^+\right)^3+1}{2\cdot\left(-3^+\right)^2+2\cdot\left(-3^+\right)-12} = \frac{-26}{18.012-6.002-12} = \frac{-26}{0.01} = -2600 \approx -\infty$$

Comparamos los límites por la izquierda y la derecha y no coinciden, la función tiene un salto infinito en X=-3:

**Es discontinua de salto infinito.**

Estudiamos el tipo de discontinuidad en X=2:

Hallamos la imagen en el punto indicado:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} = \frac{(2)^3+1}{2\cdot(2)^2+2\cdot(2)-12} = \frac{9}{8+4-12} = \frac{9}{0} = \infty \rightarrow$$

Hallamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} = \frac{-\left(2^-\right)^3+1}{2\cdot\left(2^-\right)^2+2\cdot\left(2^-\right)-12} = \frac{-9}{7.92+3.98-12} = \frac{-5}{-0.01} = 500 \approx +\infty$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} = \frac{-\left(2^+\right)^3+1}{2\cdot\left(2^+\right)^2+2\cdot\left(2^+\right)-12} = \frac{-9}{8.08+4.02-12} = \frac{-5}{0.01} = -500 \approx -\infty$$

Comparamos los límites por la izquierda y la derecha y no coinciden, la función tiene un salto infinito en X=2:

**Es discontinua de salto infinito.**

c)Calcular las asíndotas y esbozar su gráfica.

**ASINDOTAS HORIZONTALES:** Las asíndotas horizontales coinciden con el límite cuando x tiende a infinito de la función.

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = \infty \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right) = \frac{\infty}{\infty} = Ind \rightarrow$ Rompo la indeterminación dividiendo cada miembro del numerador y denominador por el coeficiente de mayor grado ($x^2$)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{-x^3}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{12}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-x+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{2}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}=\frac{-\infty+\frac{1}{\infty^2}}{2+\frac{2}{\infty}-\frac{12}{\infty^2}}=\frac{-\infty+0}{2+0+0}=\frac{-\infty}{2}=-\infty\to \text{No}$$

tiene asíndotas horizontales.

**ASINDOTAS VERTICALES**: Las asíndotas verticales coinciden con los puntos no incluidos en el dominio, donde el límite vale infinito (no tiene imagen la función).

----Denominador igual a cero

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=\infty\to\lim_{x\to a}\left(\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right)=\infty\to 2x^2+2x-12=0\to$$

$$*\,2x^2+2x-12=0$$

$$x^2+x-6=0\to x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\to\begin{cases}x_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2\\ x_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

Para $x=-3\to\lim_{x\to-3}\left(\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right)=\frac{-(-3)^3+1}{2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)-12}=\frac{-26}{18-6-12}=\frac{-26}{0}=-\infty$,

Hay una asíndota vertical en $x=-3$

Para $x=2\to\lim_{x\to-2}\left(\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right)=\frac{-2^3+1}{2\cdot2^2+2\cdot2-12}=\frac{-7}{8+4-12}=\frac{-7}{0}=-\infty$, Hay una asíndota vertical en $x=2$

**ASÍNDOTAS OBLICUAS**:

$$y=mx+n\to y=\frac{-1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$$

$$m=\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3+1}{x\cdot(2x^2+2x-12)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3+1}{2x^3+2x^2-12x}\right)=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=Ind\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2}{6x^2+4x-12}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-6x}{12x+4}\right)=\frac{\infty}{\infty}=Ind\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-6}{12}\right)=\frac{-1}{2}$$

$$n = \to \lim_{x\to\infty\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} - \frac{1}{2}\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3+1}{2\cdot(x^2+x-6)} - \frac{1}{2}\cdot x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(-x^3+1)-(x^2+x-6)\cdot x}{2\cdot(x^2+x-6)}\right) == \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3+1-x^3-x^2+6x}{2\cdot(x^2+x-6)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+6x+1}{2x^2+2x-12}\right) = \frac{\infty}{\infty} = Ind \to$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x+6}{4x+2}\right) = \frac{\infty}{\infty} = Ind \to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2}{4}\right) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

## GRAFICA:

Hallo los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y puntos de corte con los ejes para dibujar la gráfica.

a.-Puntos de corte con los Ejes

$$EJE.X \Rightarrow y = 0 \to f(x) = \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} = 0 \to -x^3+1 = 0 \to (x-1)\cdot(-x^2-x-1) = 0 \to \quad x_1 = 1 \Rightarrow PTO_1(1,0)$$

$$EJE.Y \Rightarrow x = 0 \to f(x) = \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} = \frac{-0^3+1}{2\cdot 0^2+2\cdot 0-12} = \frac{1}{-12} \Rightarrow PTO_3\left(0, \frac{-1}{12}\right)$$

b.-Intervalos de crecimiento y decrecimiento,(máximos y mínimos).

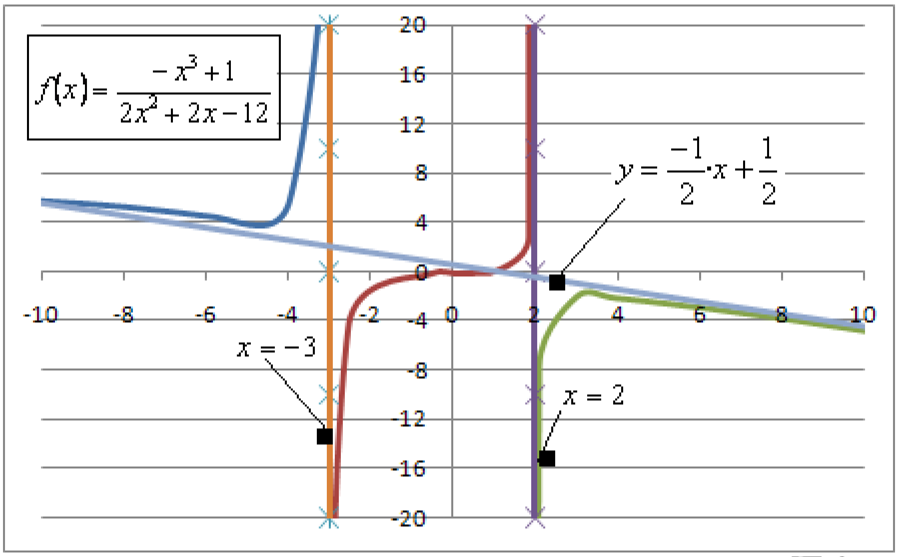
$$f(x) = \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(-3x^2)\cdot(2x^2+2x-12)-(-x^3+1)\cdot(4x+2)}{(2x^2+2x-12)^2} = \frac{-6x^4-6x^3+36x^2-(-4x^4-2x^3+4x+2)}{(2x^2+2x-12)^2} =$$

$$= \frac{-2x^4-4x^3+36x^2-4x-2}{(+)} = \frac{(+)}{(+)} > 0$$

La función siempre es creciente. No tiene ni máximos ni mínimos.

$$\begin{cases} CRECIMIENTO \to (-\infty, +\infty) \\ DECRECIMIENTO \to NUNCA \end{cases}$$




10.-Sea $f(x)=\begin{cases} -x^2+5x & si \quad 0\le x<5 \\ x-5 & si \quad 5\le x\le 10 \end{cases}$. Representar su gráfica y estudiar su continuidad.

Estudiamos su continuidad en el punto X=5

Hallamos la imagen en el punto indicado:

$$f(x)=x-5\rightarrow f(5)=5-5=0$$

Hallamos el límite por la izquierda:

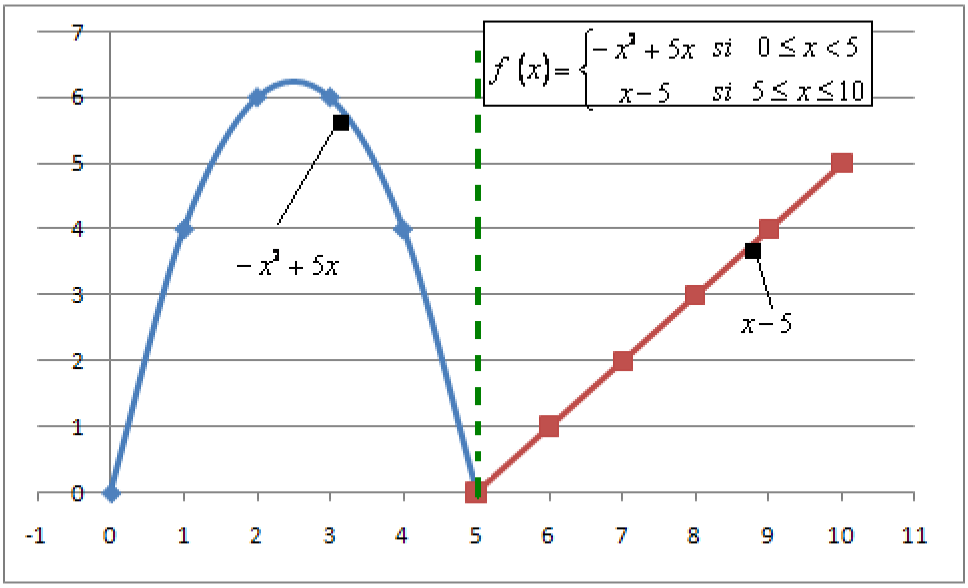
$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}=-(5)^2+5\cdot(5)=-25+25=0$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}=5-5=0$$

Comparamos los límites por la izquierda y la derecha y coinciden, y además tiene la misma imagen (cero) la función es continua en X=0, y por tanto es continua en el intervalo a estudiar $[0,10]$.

GRAFICA




11.-Sea $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+1 & si \quad x\le 1 \\ Ln(x) & si \quad x>1 \end{cases}$. a) Estudiar su continuidad en X=1 y representar su gráfica. b) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en X=1.

Estudiamos su continuidad en el punto X=5

Hallamos la imagen en el punto indicado:

$$f(x)=2x^2-3x+1 \rightarrow f(1)=2\cdot 1^2-3\cdot 1+1=2-3+1=0$$

Hallamos el límite por la izquierda:

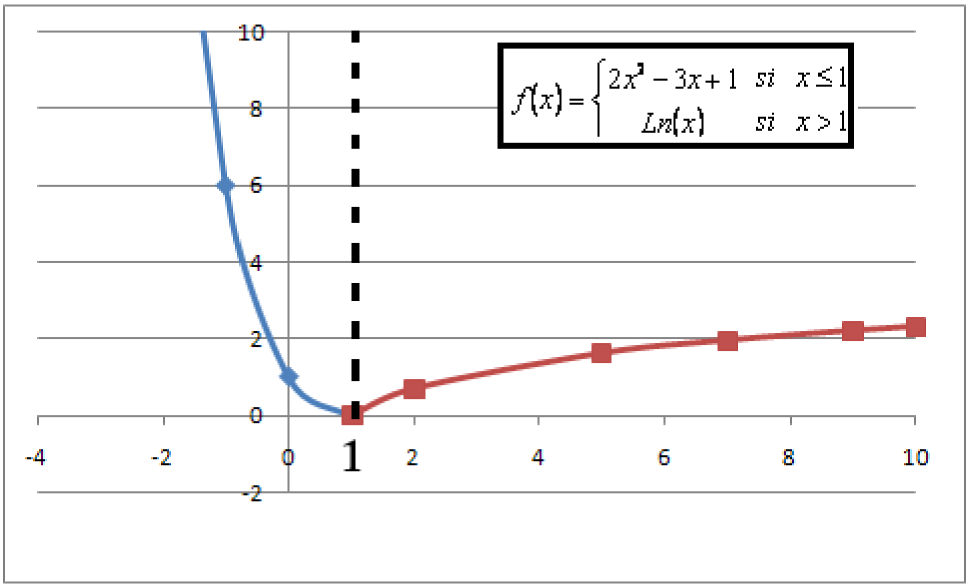
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}=2\cdot 1^2-3\cdot 1+1=2-3+1=0$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}=Ln(1)=0$$

Comparamos los límites por la izquierda y la derecha y coinciden, y además tiene la misma imagen (cero) la función es continua en X=1.

GRAFICA




b) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en X=1.

$$f(x)=2x^2-3x+1$$
$$f(-1)=2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1=2+3+1=6$$

Derivada de F(X)

$$f'(x)=4x-3\rightarrow f'(-1)=4\cdot(-1)-3=-7$$

Ecuación punto-tangente:

$$y-y_0=f'(x)\cdot(x-x_0)\rightarrow y-6=(-7)\cdot(x-(-1))\rightarrow y=-7x-7+6=-7x-1$$

12.-Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad en X=2.
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en X=3.
c) Calcular las asíndotas oblicuas(representar su gráfica).

**SOLUCION**

a)Estudiamos su continuidad en el punto X=2

Hallamos la imagen en el punto indicado:

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1}\rightarrow f(2)=\frac{2+2}{2-1}=\frac{4}{1}=4$$

Hallamos el límite por la izquierda:

$$\underset{x\to 2^-}{Lim}\, f(x)=\underset{x\to 2^-}{Lim}=\frac{2+2}{2-1}=\frac{4}{1}=4$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\underset{x\to 2^+}{Lim}\, f(x)=\underset{x\to 2^+}{Lim}=\frac{3x^2-2x}{x+2}=\frac{3\cdot 2^2}{2+2}=\frac{12}{4}=3$$

Comparamos los límites por la izquierda y la derecha y no coinciden, el límite por la derecha es 3 y por la izquierda es 3, En X=2, la función es discontinua de salto finito.

b)Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en X=3

$$f(x)=\frac{3x^2-2x}{x+2}$$

$$f(3)=\frac{3\cdot 3^2-2\cdot 3}{3+2}=\frac{27-6}{5}=\frac{21}{5}$$

Derivada de F(X)

$$f'(x)=\frac{(6x-2)\cdot(x+2)-(3x^2-2x)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{6x^2+12x-2x-4-3x^2+2x}{(x+2)^2}=\frac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2}\rightarrow$$

$$f'(3)=\frac{3\cdot 3^2+12\cdot 3-4}{(3+2)^2}=\frac{27+36-4}{25}=\frac{59}{25}$$

Ecuación punto-tangente:

$$y-y_0=f'(x)\cdot(x-x_0)\rightarrow y-\frac{21}{5}=\frac{59}{25}\cdot(x-3)\rightarrow y=\frac{59}{25}x-\frac{177}{25}+\frac{21}{5}=\frac{59}{25}x-\frac{72}{25}$$

c)Calcular las asíndotas oblicuas (representar su gráfica).

**ASÍNDOTAS OBLICUAS**:

http://apruebalasmates.blogspot.com

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\le 2\\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x>2\end{cases}$$

*) Para: $X \le 2 \rightarrow$

$y = mx + n \rightarrow$

$$m = \rightarrow \lim_{x\to\infty\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+2}{x-1}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x^2-x}\right) = \frac{\infty}{\infty} = Ind \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

No tiene asíndotas oblicuas cuando $X \le 2$

*) Para: $X > 2 \rightarrow$

$y = mx + n \rightarrow y = 3x - 8$

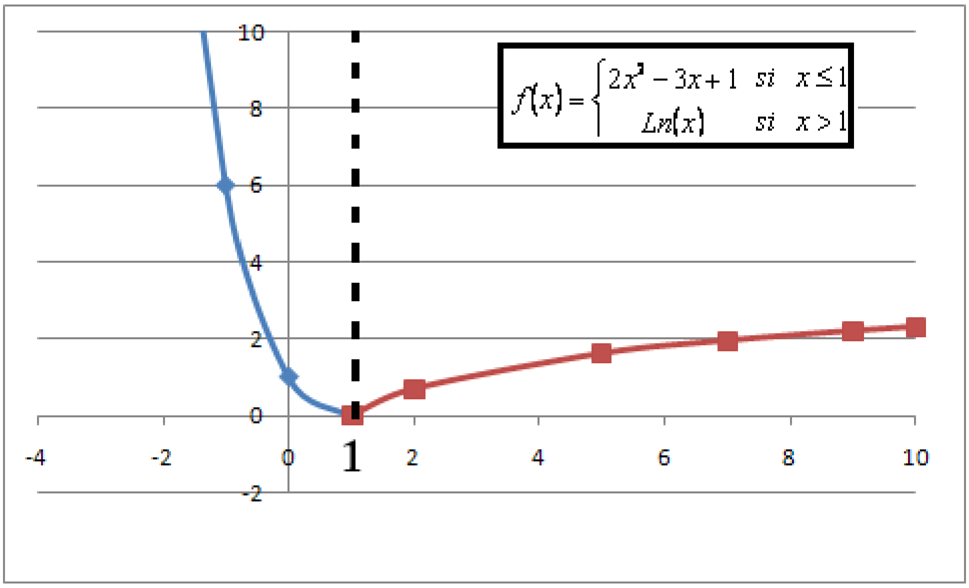
$$m = \rightarrow \lim_{x\to\infty\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3x^2-2x}{x+2}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x}{x^2+2x}\right) = \frac{\infty}{\infty} = Ind \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-2}{2x+2}\right) =$$

$$\frac{\infty}{\infty} = Ind \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{2}\right) = 3$$

$$n = \rightarrow \lim_{x\to\infty\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x}{x+2} - 3\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x^2-2x)-3x\cdot(x+2)}{x+2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x-3x^2-6x}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-8x}{x+2}\right) = \frac{\infty}{\infty} = Ind \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-8}{1}\right) = -8$$

La única asíndota que tiene es: $y = 3x - 8$




b) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en X=1.

$$f(x)=2x^2-3x+1$$
$$f(-1)=2\cdot(-1)^2-3(-1)+1=2+3+1=6$$

Derivada de F(X)

$$f'(x)=4x-3\to f'(-1)=4\cdot(-1)-3=-7$$

Ecuación punto-tangente:

$$y-y_0=f'(x)\cdot(x-x_0)\to y-6=(-7)\cdot(x-(-1))\to y=-7x-7+6=-7x-1$$