1. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Calcular las matrices C y D, sabiendo que AC = BD = Id.

Hallo C:

$$A\cdot C = B\cdot D = Id \Rightarrow \begin{cases} A\cdot C = Id \\ B\cdot D = Id \end{cases} \rightarrow \quad A^{-1}\cdot A\cdot C = A^{-1}\cdot Id \rightarrow C = A^{-1}$$ Halla la inversa de A:

1.- Hallo el determinante de A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (9) = -7$$

2.- Hallo los adjuntos de A: $Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A_{11} = (1)\cdot(-1)^{1+1} = 1$; $A_{12} = (3)\cdot(-1)^{1+2} = -3$;

$A_{21} = (3)\cdot(-1)^{2+1} = -3$, $A_{22} = (2)\cdot(-1)^{2+2} = 2$;

;

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} * Adj(A) = \frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$,Como $A^{-1} = C$;

$$C = \frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallo D:

$$A\cdot C = B\cdot D = Id \Rightarrow \begin{cases} A\cdot C = Id \\ B\cdot D = Id \end{cases} \rightarrow \quad B^{-1}\cdot B\cdot D = B^{-1}\cdot Id \rightarrow D = B^{-1}$$ Halla la inversa de B:

1.- Hallo el determinante de B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 0 = -5$$

2.- Hallo los adjuntos de B: $Adj(B) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$B_{11} = (-5)\cdot(-1)^{1+1} = -5$; $B_{12} = (1)\cdot(-1)^{1+2} = -1$;
$B_{21} = (0)\cdot(-1)^{2+1} = 0$, $B_{22} = (1)\cdot(-1)^{2+2} = 1$;

;

$$Adj(B)=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^t \Rightarrow\ B^{-1}=\frac{1}{|B|}*Adj(B)=\frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$,Como $B^{-1}=D$;

$$D=\frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

2. Sea la matriz A = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/10 & 1 & 0\\ 1/10 & 0 & 1\end{pmatrix}$. a) Calcular la matriz A + A^2. b) Resolver el sistema: A$^5\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 5\\ 1\end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz A + A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/10 & 1 & 0\\ 1/10 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/10 & 1 & 0\\ 1/10 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot 1/10+0\cdot 1/10 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1\\ 1/10\cdot1+1/10\cdot1+0\cdot 1/10 & 1/10\cdot0+1\cdot1+0\cdot1 & 1/10\cdot0+1\cdot0+0\cdot1\\ 1/10\cdot1+0\cdot 1/10+1\cdot 1/10 & 1/10\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 1/10\cdot0+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2/10 & 1 & 0\\ 2/1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2+A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2/10 & 1 & 0\\ 2/10 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/10 & 1 & 0\\ 1/10 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 3/10 & 2 & 0\\ 3/10 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

3. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix}2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}2(x-1)\cdot(x+1) & x+1 & (x+1)\cdot(x+1)\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)\cdot(x-1) & x-1 & (x-1)\cdot(x+1)\end{vmatrix}=0\rightarrow (x-1)\cdot(x+1)\begin{vmatrix}2\cdot(x+1) & x+1 & x+1\\ 1 & x+1 & 1\\ x-1 & x-1 & x-1\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$$(x-1)\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix}2(x+1) & x+1 & (x+1)\\ 1 & x+1 & 1\\ (x-1) & x-1 & (x-1)\end{vmatrix}=0\rightarrow (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix}2\cdot(x+1) & x+1 & x+1\\ 1 & x+1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$$(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix}2(x+1) & x+1 & (x+1)\\ 1 & x+1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}^{C_1=C_1-C_3}=0\rightarrow (x-1)^2\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix}2\cdot(x+1)-(x+1) & x+1 & x+1\\ 1-1 & x+1 & 1\\ 1-1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$$(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 2x+2-x-1 & x+1 & (x+1) \\ 0 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\rightarrow(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x+1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$$(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\rightarrow(x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot[(x+1)-1]=0\rightarrow(x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot x=0$$

$$x-1=0\rightarrow x_1=1$$
$$x+1=0\rightarrow x_2=-1$$
$$x=0\rightarrow x_3=0$$

4. Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la igualdad: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3\rightarrow\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{C_1=C_1-C_3}=\begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab & b^2 \\ 2a-2b & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3\rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{C_2=C_2-C_3}=\begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a+b-2b & 2b \\ 1-1 & 1-1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3\rightarrow\begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3\rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (a-b)\cdot(a+b) & b\cdot(a-b) & b^2 \\ 2\cdot(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3\rightarrow(a-b)\cdot\begin{vmatrix} (a+b) & b\cdot(a-b) & b^2 \\ 2 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3\rightarrow$$

$$(a-b)\cdot(a-b)\begin{vmatrix} (a+b) & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3\rightarrow$$

$$(a-b)\cdot(a-b)\cdot[(a-b)-2b]=(a-b)^3\rightarrow(a-b)^2\cdot[a-b+2b]=(a-b)^3\rightarrow(a-b)^2\cdot(a-b)=(a-b)^3\rightarrow$$
$$\rightarrow(a-b)^3=(a-b)^3$$

La igualdad es verdadera

5. Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b, c para que se verifique AB=BA. b) Para a=b=c=1, calcular B^{10}.

a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b, c para que se verifique AB=BA.

$$(A)\cdot(B)=(B)\cdot(A)\Rightarrow(A)\cdot(B)=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B)\cdot(A)=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\2a+5c&2c+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\7c&7c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\7c&7c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2c&5b+2c&0\\2a+c&2b+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}5a+2b=5a+2c\\2a+5b=5b+2c\\7c=2a+c\\7c=2b+5c\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}b=c\\a=c\end{matrix}\Rightarrow a=b=c$$

La condición para que se cumpla esta igualdad requiere que las tres letras sean iguales.

b) Para a=b=c=1, calcular B^{10}. $(B)^{10}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{10}\Rightarrow$

$$(B)^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix};(B)^4=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}8&8&0\\8&8&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(B)^5=\begin{pmatrix}8&8&0\\8&8&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}16&16&0\\16&16&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(B)^{10}=(B)^5\cdot(B)^5=\begin{pmatrix}16&16&0\\16&16&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16&16&0\\16&16&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}512&512&0\\512&512&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

6. (S-99). Hallar en función de a, el valor del determinante: A = $\begin{vmatrix}a&a&a&a\\2&a&a&a\\3&2&a&a\\4&3&2&a\end{vmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}a&a&a&a\\2&a&a&a\\3&2&a&a\\4&3&2&a\end{vmatrix}^{F_4=F_4-F_3}=\begin{vmatrix}a&a&a&0\\2&a&a&0\\3&2&a&0\\4&3&2&a-2\end{vmatrix}=(a-2)\cdot\begin{vmatrix}a&a&a\\2&a&a\\3&2&a\end{vmatrix}^{F_3=F_3-F_2}=(a-2)\cdot\begin{vmatrix}a&a&0\\2&a&0\\3&2&a-2\end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)\cdot(a-2)\cdot\begin{vmatrix}a&a\\2&a\end{vmatrix}=(a-2)^2\cdot(a^2-2a)=(a-2)^2\cdot a\cdot(a-2)=a\cdot(a-2)^3$$

7. (M-01). Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Hallo el determinante de A

$$(A) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}^{C_1=C_1-C_2} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}^{F_1=F_1-F_2} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot ((1+b)\cdot(1-b)-1) = a^2 \cdot (1-b^2-1) = a^2 \cdot (-b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

Hallo el determinante de B:

$$(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a)\cdot(1-a)-1 & 1-1 \\ 1-1 & (1+b)\cdot(1-b)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a^2-1 & 0 \\ 0 & 1-b^2-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{vmatrix} = (-a^2)\cdot(-b^2) = a^2 \cdot b^2$$

Ambos determinantes dan: $|B| = |A| = a^2 \cdot b^2$

8. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$

b) Para a=1 y b=0, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I^2$

a) $A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

Igualando términos obtenemos:

$$\begin{cases} 12 = 3b \rightarrow b = 4 \\ 2 = 2a \rightarrow a = 1 \\ 3a = 3 \\ 3b = 12 \end{cases}$$

b)Si a=1 y b=0, entonces: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$$X \cdot B - A = I^2 \rightarrow X \cdot B = I + A \rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = (I + A) \cdot B^{-1} \rightarrow X = (I + A) \cdot B^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de B: B^{-1}

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$$

Lo resuelvo mediante adjuntos:

$$B_{1,1}=\alpha_{1,1}\cdot(-1)^{1+1}=|1|\cdot(-1)^{1+1}=1\cdot 1=1;$$
$$B_{1,2}=\alpha_{1,2}\cdot(-1)^{1+2}=|6|\cdot(-1)^{1+2}=6\cdot(-1)=-6$$
$$B_{2,1}=\alpha_{2,1}\cdot(-1)^{1+1}=|0|\cdot(-1)^{2+1}=0\cdot(-1)=0$$
$$B_{2,2}=\alpha_{1,1}\cdot(-1)^{2+2}=|1|\cdot(-1)^{2+2}=1\cdot 1=1$$

$$B^{-1}=\frac{[Adj(B)]^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial:

$$\rightarrow X=(I+A)\cdot B^{-1}\rightarrow\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

9. Sea la igualdad $A\cdot X+B=A$ donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

a) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa

b) Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a) $A\cdot X+B=A\rightarrow A\cdot X=A-B\rightarrow A\cdot A^{-1}\cdot X=A^{-1}\cdot(A-B)\rightarrow X=A^{-1}\cdot A-A^{-1}\cdot B\rightarrow$
$\rightarrow X=I-A^{-1}\cdot B$

b) $X=I-A^{-1}\cdot B$

Calculamos la matriz inversa de A: A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-5=1$$

Lo resuelvo mediante adjuntos:

$$A_{1,1}=\alpha_{1,1}\cdot(-1)^{1+1}=|3|\cdot(-1)^{1+1}=3\cdot 1=3;$$
$$A_{1,2}=\alpha_{1,2}\cdot(-1)^{1+2}=|1|\cdot(-1)^{1+2}=1\cdot(-1)=-1$$
$$A_{2,1}=\alpha_{2,1}\cdot(-1)^{2+1}=|5|\cdot(-1)^{2+1}=5\cdot(-1)=-5$$
$$A_{2,2}=\alpha_{1,1}\cdot(-1)^{2+2}=|2|\cdot(-1)^{2+2}=2\cdot 1=2$$

$$A^{-1}=\frac{[Adj(A)]^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial:

$$\rightarrow X = I - A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-3\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5&-19\\-2&7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4&19\\2&-6\end{pmatrix}$$

10. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix}$,calcular:

a) $(A+B)^2$

b) $A^2 + B^2 + 2\cdot A\cdot B$

c) ¿Son iguales los resultados de los apartados anteriores?. Razonar la respuesta

a) $(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix}-1&-1\\3&3\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-1&-1\\3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\3&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&-2\\6&6\end{pmatrix}$

b)

$$A^2 + B^2 + 2\cdot A\cdot B = A\cdot A + B\cdot B + 2\cdot A\cdot B = \begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix} +$$

$$+ 2\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-2\\4&-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-3&-2\\-3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&-2\\4&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6&-4\\-6&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&-6\\-2&7\end{pmatrix}$$

c) Los resultados de los apartados son distintos, por lo tanto se interpreta que la multiplicación de matrices no tiene la propiedad conmutativa respecto de la suma.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix}a&-1\\1&a\end{pmatrix}$

a) Prueba que, para cualquier valor que tenga el numero real a, la siguiente matriz tiene inversa:

b) Calcula la matriz inversa de A cuando a=0

a) Una matriz, por definición, tiene inversa si su determinante es distinto de cero

$A = \begin{pmatrix}a&-1\\1&a\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}a&-1\\1&a\end{vmatrix} = a^2 + 1 \geq 0$, luego siempre tiene determinante.

b) $A = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

Resuelvo la matriz mediante adjuntos:

$A_{1,1} = \alpha_{1,1}\cdot(-1)^{1+1} = |0|\cdot(-1)^{1+1} = 0\cdot 1 = 0$;

$A_{1,2} = \alpha_{1,2}\cdot(-1)^{1+2} = |1|\cdot(-1)^{1+2} = 1\cdot(-1) = -1$

$A_{2,1} = \alpha_{2,1}\cdot(-1)^{2+1} = |-1|\cdot(-1)^{2+1} = (-1)\cdot(-1) = 1$

$A_{2,2} = \alpha_{1,1}\cdot(-1)^{2+2} = |0|\cdot(-1)^{2+2} = 0\cdot 1 = 0$

$$A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

12. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - 4y - 4 = 0 \\ x - \frac{9}{2}y - 3 = 0 \end{cases}$$

Calcular:

a) Expréselo en la forma matricial $A \cdot X = B$.
b) Calcular la matriz inversa de A.
c) Resuélvalo.

a) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - 4y - 4 = 0 \\ x - \frac{9}{2}y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 12y = 12 \\ 2x - 9y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 6y = 6 \\ 2x - 9y = 6 \end{cases} \rightarrow A \cdot X = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -9 - (-12) = 3$

Resuelvo la matriz mediante adjuntos:

$$A_{1,1} = \alpha_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} = |-9| \cdot (-1)^{1+1} = -9 \cdot 1 = -9 \ ;$$
$$A_{1,2} = \alpha_{1,2} \cdot (-1)^{1+2} = |2| \cdot (-1)^{1+2} = 2 \cdot (-1) = -2$$
$$A_{2,1} = \alpha_{2,1} \cdot (-1)^{2+1} = |-6| \cdot (-1)^{2+1} = (-6) \cdot (-1) = 6$$
$$A_{2,2} = \alpha_{1,1} \cdot (-1)^{2+2} = |1| \cdot (-1)^{2+2} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^t}{3} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$

13. Calcular el determinante de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 * Adj_{1,1} + 2 * Adj_{1,2+} 0 * Adj_{1,3} = 1 * A_{1,1} + 2 * A_{1,2} + 0 * A_{1,3} = 1 * (-12) + 2 * 7 + 0 * 8 = 2$$

Donde: $A_{1,1} = \alpha_{1,2} * (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} * (-1)^{1+1} = 0 * 1 - 3 * 4 = -12$

$$A_{1,2} = \alpha_{1,1} * (-1)^{1+2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} * (-1)^{1+2} = 2 * 1 - 3 * 3 = -7 * (-1) = 7$$

$$A_{1,3} = \alpha_{1,3} * (-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} * (-1)^{1+3} = 2 * 4 - 0 * 3 = 8$$

14. Calcular el determinante de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 * Adj_{4,1} + 2 * Adj_{4,2} + 0 * Adj_{4,3} + 1 * Adj_{4,4} = 0 * A_{4,1} + 2 * A_{4,2} + 0 * A_{4,3} + 1 * A_{4,4} =$$

$$= 0 + 2 * (-30) + 0 + 1 * (-30) = -90$$

Donde: (resolvemos el determinante por adjuntos por la fila 4)

$$A_{4,2} = \alpha_{4,2} * (-1)^{4+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} * (-1)^{4+2} = 18 + 0 - 10 - 0 - 20 - 18 = -30$$

$$A_{4,4} = \alpha_{4,4} * (-1)^{4+4} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} * (-1)^{4+4} = 16 - 18 + 6 - (-8 + 6 + 36) = -30$$