1. Hallar f (x) sabiendo que su derivada es $f'(x) = 3x^2 + 1$ y que su gráfica pasa por el punto (2,6).

$$\int (3x^2 + 1)dx = \frac{3x^3}{3} + x + C \to x^3 + x + C$$

$$F(2) = 6 \to F(2) = 2^3 + 2 + C = 6 \to C = -4$$

$$F(x) = x^3 + x - 4$$

2. El valor de un equipo informático decrece a un ritmo dado por (10 t –50) miles de ptas/año. Si el valor inicial del citado equipo era de 300.000 ptas. ¿cuál será su valor al cabo de 5 años? (t indica el tiempo en nº de años).

$$f'(t) = 10t - 50$$

$$\int (10t - 50)dt = \frac{10t^2}{2} - 50t + C \to 5t^2 - 50t + C$$

$$F(0) = 300 \to F(0) = 10 \cdot 0 - 50 \cdot 0 + C = 0 \to C = 300$$

$$F(t) = 5t^2 - 50t + 300$$

3. Calcular f(x), sabiendo que es continua, que f (0) = 0 y además que su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} \int (1 - 2x)dx = x - x^2 + C_1 & \text{si } x < 1 \\ \int 1 dx = x + C_2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F(0) = 0 \to F(0) = x - x^2 + C_1 \to F(0) = 0 - 0^2 + C_1 = 0 \to C_1 = 0$$

$$F(x) = x - x^2$$

Para que la función sea continua, se tiene que cumplir: $F(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \Rightarrow x - x^2 = x + C_2 \xrightarrow{X=1} 1 - 1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -1$$

Por tanto, la función será: $f'(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

4. Calcular la integral $\int_3^5 (x^2 - 4)\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}\, dx$.

$$\int_3^5 (x^2 - 4)\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}\, dx = \int_3^5 (x^2 + 2)dx = \left. \frac{x^3}{3} + 2x \right]_3^5 = \left(\frac{5^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{3^3}{3} + 2\right) = \frac{155}{3} - 15 = 36.\widehat{6}$$

5. Calcular el valor de a >0 e los siguientes casos: a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$ =a ;b) $\int_0^a \frac{1}{x+1} dx$ = 3 ;c) $\int_0^3 \frac{1}{x+a} dx$ =5.

$$a)\ \int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a \rightarrow Ln(x+1)\Big]_0^3 = a \rightarrow Ln(4) - \ln(1) = a \rightarrow Ln\left(\frac{4}{1}\right) = a \rightarrow Ln(4) = a \rightarrow a = 1,38$$

$$b)\int_0^a \left(\frac{1}{x+1}\right)dx = Ln(x+1)\Big]_0^a = 3 \rightarrow Ln(a+1) - Ln(1) = 3 \rightarrow Ln\left(\frac{a+1}{1}\right) = 3 \rightarrow Ln(a+1) = 3$$

$$e^{Ln(a+1)} = e^3 \rightarrow a = 1 - e^3 = -1 + 20,08 = 19,08$$

$$c)\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = 5 \rightarrow Ln(x+a)\Big]_0^3 = 5 \rightarrow Ln(3+a) - Ln(a) = 5 \rightarrow Ln\left(\frac{3+a}{a}\right) = 5 \rightarrow e^{Ln\left(\frac{3+a}{a}\right)} = e^5 \rightarrow$$

$$\frac{3+a}{a} = e^5 \rightarrow a\cdot e^5 = 3 + a \rightarrow 148a = 3 + a \rightarrow a = \frac{3}{147} = 0,02$$

6. Calcular la integral $\int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x}\ dx$

$$\int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x}\ dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + 2\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + 2Ln(x)\Big]_1^2 = \left(\frac{4}{2} + 2 + 1,28\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) = 5,38 - 1,5 = 3,88$$

7. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$. Calcular los valores de b para los cuales se cumple que $\int_0^b f(x)\ dx = 0$

$$\int_0^b f(x)\ dx = 0 \rightarrow \int_0^b \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx = 0 \rightarrow Ln(x^2-x+1)\Big]_0^b = 0 \rightarrow Ln(b^2-b+1) - Ln(0) = 0$$

$$e^{Ln(b^2-b+1)} = e^0 \rightarrow b^2 - b + 1 = 1 \rightarrow b^2 - b = 0 \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

8. Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Calcular el valor de a >0 para el cual se verifica: $\int_0^a f(x)\ dx = 1$

$$\int_0^a f(x)\ dx = 1 \rightarrow \int_0^a \left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx = 1 \rightarrow Ln(x^2+1)\Big]_0^a = 1 \rightarrow Ln(a^2+1) - Ln(0^2+1) = 1 \rightarrow Ln\left(\frac{a^2+1}{1}\right) = 1 \rightarrow$$

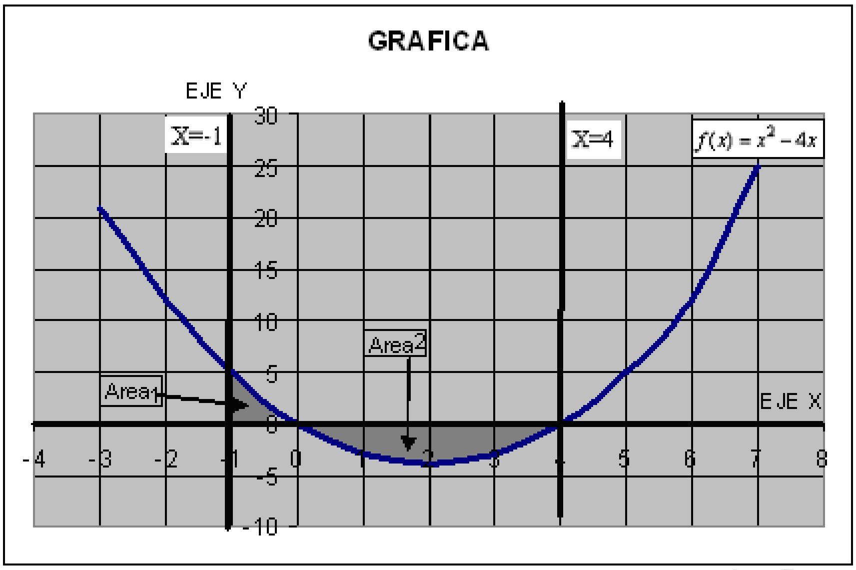
$$\rightarrow e^{Ln\left(\frac{a^2+1}{1}\right)} = e^1 \rightarrow \frac{a^2+1}{1} = e \rightarrow a^2 = e - 1 \rightarrow a = \pm\sqrt{e-1} = \pm 2,53$$

9. Determinar el valor de a>0, tal que: $\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = -1$

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = -1 \rightarrow \int_0^a (-4x)\cdot(1+x^2)^{-2}dx = -1 \rightarrow (-2)\cdot\int_0^a 2x\cdot(1+x^2)^{-2}dx = 1 \rightarrow (-2)\cdot\frac{(1+x)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg]_0^a = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\cdot(1+x)^{-1}\Big]_0^a = -1 \rightarrow 2\cdot(1+a)^{-1} - 2\cdot 1 = -1 \rightarrow \frac{2}{1+a} = 1 \rightarrow 2 = 1 + a \rightarrow a = 1$$

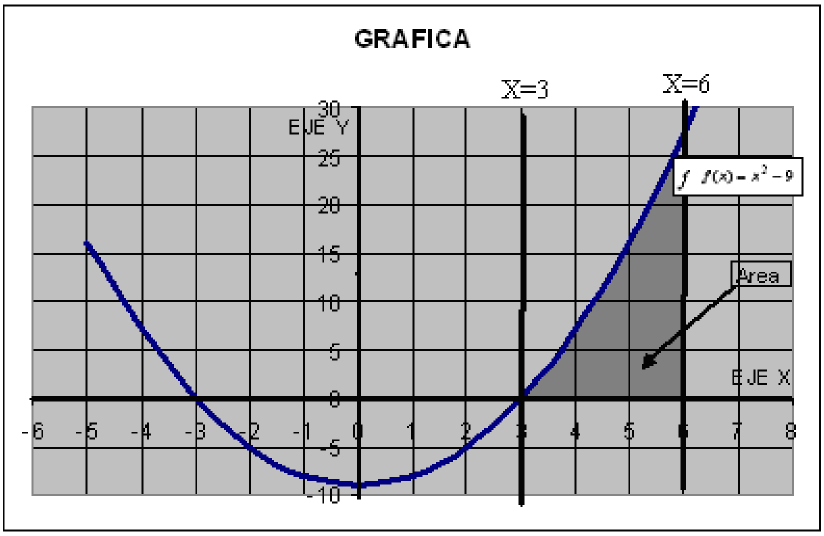
10. Calcular el área limitado por la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x$, el eje OX y las rectas x=-1 y x=4.



$$Area = Area1 + |Area2| = \int_{-1}^{0} (x^2 - 4x)dx + \left|\int_{0}^{4} (x^2 - 4x)dx\right| = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg]_{-1}^{0} + \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg]_{0}^{4}\right| =$$

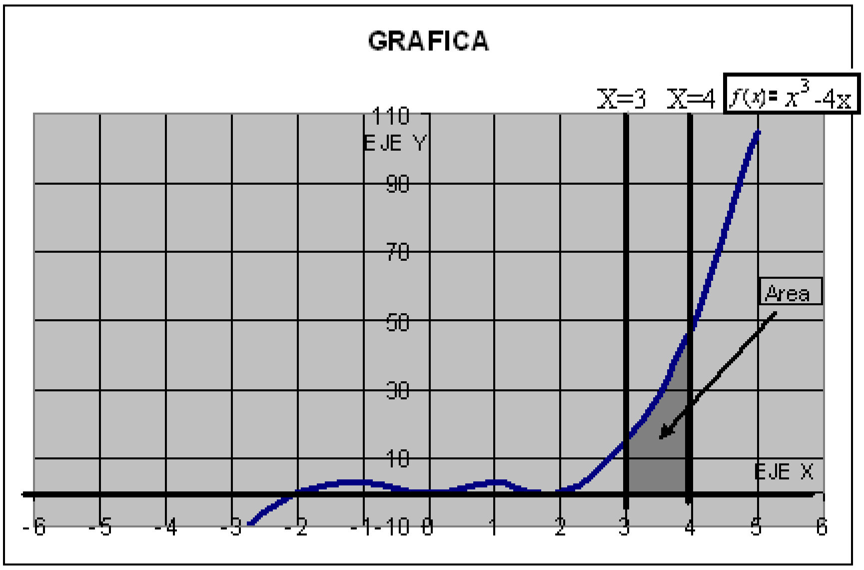
$$= \left(0 - \left(\frac{-1}{3} - 2\right)\right) + \left|\left(\frac{4^3}{3} - 32\right) - 0\right| = \frac{7}{3} + \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

11. Calcular el área limitado por la gráfica de $f(x) = x^2 - 9$, el eje OX y las rectas x=3 y x=6.



$$Area = \int_{3}^{6} (x^2 - 9)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 9x\right)\Bigg]_{3}^{6} = \left(\frac{6^3}{3} - 9{\cdot}6\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 9{\cdot}3\right) = (72 - 54) - (9 - 27) = 36$$

12. Hallar el área delimitada por la gráfica $g(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas x=3 y x=4.



$$Area=\int_3^4 \left(x^3-4x\right)dx=\left[\left(\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x}{2}\right)\right]_2^4=\left(\frac{4^4}{4}-\frac{4\cdot4}{2}\right)-\left(\frac{2^4}{4}-\frac{4\cdot2}{2}\right)=(64-32)-\left(\frac{81}{4}-18\right)=\frac{119}{4}=29{,}75$$

13. Sea la función $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$. Hallar el área delimitada por la gráfica de f(x) y el eje OX entre x=0 y x=3.

Hallo los puntos de corte con el eje X, para determinar los límites de integración:

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-5=0 \rightarrow$ Aplicamos Ruffini:

	2	-9	12	-5
1		2	-7	5
	2	-7	5	
1		2	-5	
	2	-5	0	

$$f(x)=(x-1)\cdot(x-1)\cdot(2x-5)=0\rightarrow\begin{cases} x=1\rightarrow PtoA(1,0)\\ x=1\rightarrow PtoB(1,0)\\ x=2{,}5\rightarrow PtoC(2.5,0)\end{cases}$$

$$Area=\left|Area[0\leftrightarrow1]\right|+\left|Area[1\leftrightarrow2{,}5]\right|+\left|Area[2{,}5\leftrightarrow3]\right|=\left|\int_0^1\left(2x^3-9x^2+12x-5\right)dx\right|+\left|\int_1^{2,5}\left(2x^3-9x^2+12x-5\right)dx\right|$$

$$+\left|\int_{2,5}^3\left(2x^3-9x^2+12x-5\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{2}-3x^3+6x^2-5x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^4}{2}-3x^3+6x^2-5x\right]_1^{2,5}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{2}-3x^3+6x^2-5x\right]_{2,5}^3\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}-3+6-5-0\right|+\left|19{,}53-46{,}87+37{,}5-12{,}5-\left(\frac{1}{2}-3+6-5\right)\right|+\left|40{,}5-81+54-15-(-2{,}34)\right|=\left|-1{,}5\right|+\left|-0{,}84\right|+\left|0{,}84\right|=3{,}18$$

14. Sea la función $f(x)=x^3-3x$, hallar el área del recinto limitado por la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas verticales x=-1 y x= ½

Hallo los puntos de corte con el eje X:

$$f(x)=0 \rightarrow f(x)=x^3-3x=0 \rightarrow x\cdot(x^2-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow PtoA(0,0) \\ x^2-3=0 \rightarrow x^2=3 \rightarrow \begin{cases} x_2=-\sqrt{3}\approx -1{,}73 \rightarrow PtoB(\ ) \\ x_3=+\sqrt{3}\approx 1{,}73 \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de cortes están dentro del intervalo de entre mis rectas verticales solo es el punto (0,0), con lo cual ese será uno de mis límites.

$$Area=\left|Area[-1\leftrightarrow 0]\right|+\left|Area[0\leftrightarrow 0{,}5]\right|=\left|\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx\right|+\left|\int_{0}^{0{,}5}(x^3-3x)dx\right|=$$

$$\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{0{,}5}\right|=\left|0-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)\right|+\left|0{,}01-0{,}37-0\right|=\left|1{,}25\right|+\left|-0{,}36\right|=1{,}61$$

15. Sea la función $y=x^3-9x$. Hallar el área de la región que delimita dicha función con el eje OX.

Hallo los puntos de corte con el eje X:

$$f(x)=0 \rightarrow f(x)=x^3-9x=0 \rightarrow x\cdot(x^2-9)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow PtoA(0,0) \\ x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow \begin{cases} x_2=-3 \rightarrow PtoB(-3,0) \\ x_3=+3 \rightarrow PtoC(3,0) \end{cases} \end{cases}$$

$$Area=\left|Area[-3\leftrightarrow 0]\right|+\left|Area[0\leftrightarrow 3]\right|=\left|\int_{-3}^{0}(x^3-9x)dx\right|+\left|\int_{0}^{3}(x^3-9x)dx\right|=$$

$$\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{2}-\frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|=\left|0-(20{,}25-40{,}50)\right|+\left|20{,}25-40{,}50+0\right|=\left|20{,}25\right|+\left|20{,}25\right|=40{,}50$$

16. Sea la función $f(x)=-(x+2)(x-2)(x-4)$. Hallar el área del recinto limitado por la curva y el eje de abscisas.

Hallo los puntos de corte con el eje X:

$$f(x)=0 \rightarrow f(x)=-(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x_1=2 \rightarrow PtoA(-2,0) \\ x+2=0 \rightarrow x_2=-2 \rightarrow PtoB(2,0) \\ x-4=0 \rightarrow x_3=4 \rightarrow PtoC(4,0) \end{cases}$$

$$Area=Area_1+Area_2=\left|Area[-2\leftrightarrow 2]\right|+\left|Area[2\leftrightarrow 4]\right| \Rightarrow$$

$$Area_1=\int_{-2}^{0}(-x^3+4x^2-4x-16)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-16x\right)\Bigg]_{2}^{2}=\left(-4+\frac{32}{3}+3-32\right)-\left(-4-\frac{32}{3}+8+32\right)=$$

$$=\frac{64}{3}-64=\frac{-128}{3}$$

$$Area_2=\int_{2}^{4}(-x^3+4x^2-4x-16)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-16x\right)\Bigg]_{2}^{4}=\left(-64+\frac{256}{3}+32-64\right)-\left(-4+\frac{32}{3}+8-32\right)=\frac{20}{3}$$

$$Area=Area_1+Area_2=\left|\frac{-128}{3}\right|+\left|\frac{20}{3}\right|=\frac{128}{3}+\frac{20}{3}=\frac{148}{3}=49,\widehat{3}$$

17. Sea la función $y=3x-x^3$. Hallar el área de la región que delimita dicha función con el eje OX.

Hallo los puntos de corte con el eje X:

$$f(x)=0 \to f(x)=3x-x^3=0 \to x(3-x^2)=0 \to \begin{cases} x_1=0 \to PtoA(0.0) \\ 3-x^2=0 \to x^2=3 \to \begin{cases} x_2=-\sqrt{3}\approx -1{,}73 \to PtoB(-1.73,0) \\ x_3=+\sqrt{3}\approx 1{,}73 \to PtoC(0{,}1.73) \end{cases} \end{cases}$$

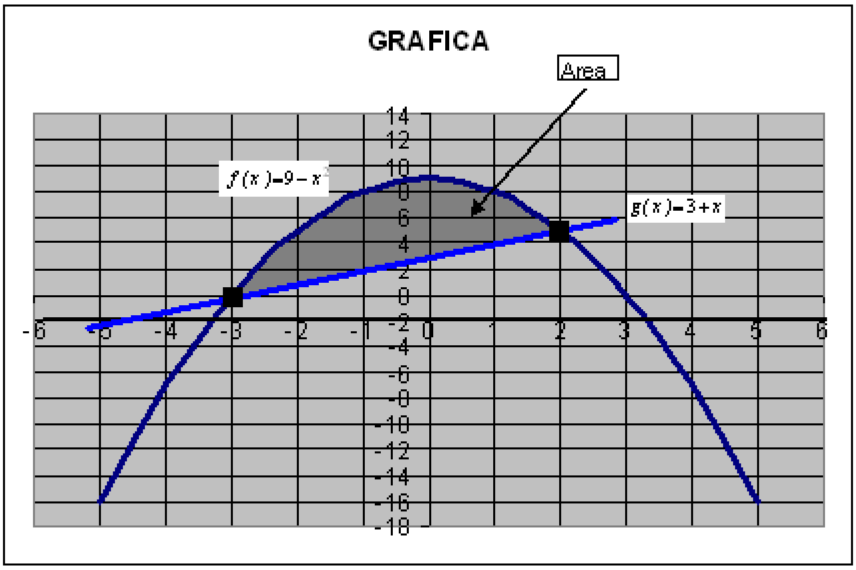
Los puntos de cortes están dentro del intervalo de entre mis rectas verticales solo es el punto (0,0), con lo cual ese será uno de mis límites.

$$Area=\left|Area[-\sqrt{3}\leftrightarrow 0]\right|+\left|Area[0\leftrightarrow\sqrt{3}]\right|=\left|\int_{\sqrt{-3}}^{0}(3x-x^3)dx\right|+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}(3x-x^3)dx\right|=$$

$$\left|\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{\sqrt{-3}}^{0}\right|+\left|\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{3}}\right|=\left|0-\left(\frac{3(\sqrt{-3})^2}{2}-\frac{(\sqrt{-3})^4}{4}\right)\right|+\left|\left(\frac{3(\sqrt{3})^2}{2}-\frac{(\sqrt{3})^4}{4}\right)-0\right|=\left|\frac{3\cdot3}{2}-\frac{(-3)^2}{4}\right|+\left|\frac{3\cdot3}{2}-\frac{(-3)^2}{4}\right|=$$

$$=\left|\frac{18-9}{4}\right|+\left|\frac{18-9}{4}\right|=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}=4{,}50$$

18. Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$, y $g(x)=3+x$ y obtener su área.

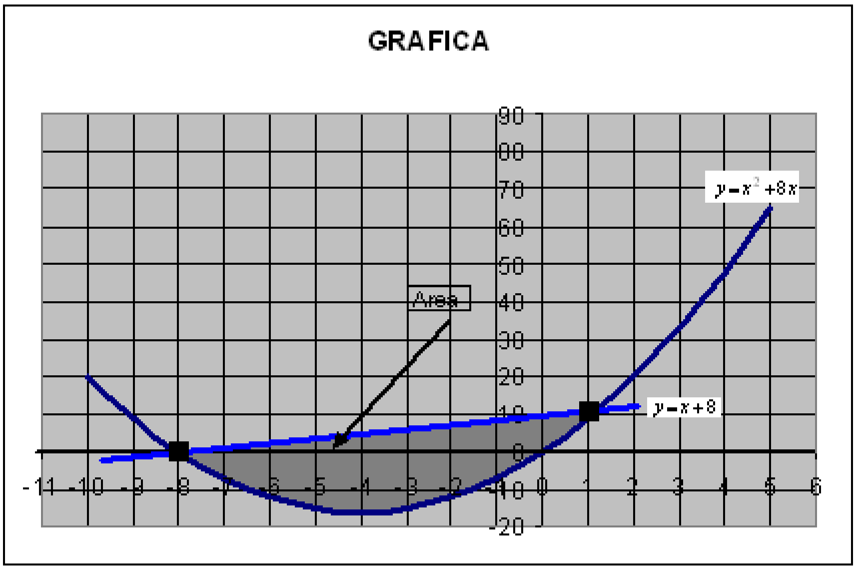


$$Area=\int_{-3}^{2}(9-x^2-(3+x))dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}-3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_{-3}^{2}=(18-2{,}6-6-2)-(-27+9+9-4{,}5)=20{,}90$$

19. Hallar el área del recinto plano limitado por las gráficas de la curva $y=x^2+8x$ y la recta $y=x+8$

$$x^2+8x=x+8 \to x^2+7x-8=0 \to x=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{-7\pm 9}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-7+9}{2}=1 \\ x_2=\frac{-7-9}{2}=-8 \end{cases}$$

$$Area=\int_{-8}^{1}(x+8-(x^2+8x))dx=\left(\frac{x^2}{2}+8x-\frac{x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right)\Big]_{-8}^{1}=\left|\left(\frac{1}{2}+8\frac{1}{3}+4\right)-\left(\frac{64}{2}+64-\frac{512}{3}+\frac{512}{2}\right)\right|=\left|(85{,}8\hat{3})-(181{,}\hat{3})\right|=95{,}46$$

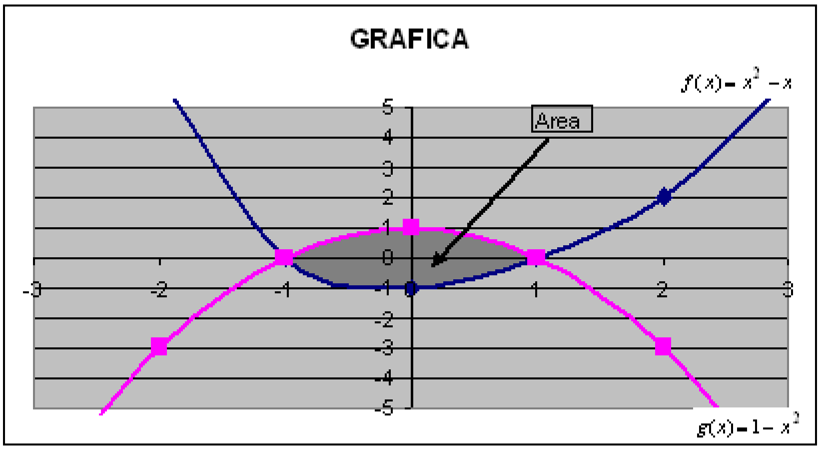


20. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las funciones: $f(x)=x^2-x$; $g(x)=1-x^2$

Hallo los límites de integración:

$$x^2-x=1-x^2 \to 2x^2-x-1=0 \to x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{1+3}{4}=1 \\ x_2=\frac{1-3}{4}=-0.5 \end{cases}$$

$$Area=\int_{-0.5}^{1}\left(x^2-x-\left(1-x^2\right)\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-0.5}^{1}=\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg]_{-0.5}^{0}=\left|\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{2}-1\right)-(0.083-0.125+0.5)\right|=\left|-1.125\right|=1.125$$



21. Sean las funciones $f(x)=x^2+2x-3$, y $g(x)=-x^2+1$. Hallar el área limitada por las gráficas de f(x) y g(x).

Hallo los límites de integración:

$$x^2+2x-3=-x^2+1 \to 2x^2+2x-4=0 \to x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{4}=\frac{-2\pm 6}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{-2+6}{4}=1 \\ x_2=\frac{-2-6}{4}=-2 \end{cases}$$

$$Area = \int_{-2}^{1} \left(\left(x^2+2x-3\right) - \left(x^2+1\right) \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x - \frac{x^2}{2} - x \right) \Bigg]_{-2}^{1} = \left(\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x \right) \Bigg]_{-2}^{0} = \left| \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) - \left(-5.3 + 4 + 8 \right) \right| = \left| -9 \right| = 9$$

22. Hallar el área del recinto acotado limitado por las curvas $f(x) = x^2 - 2x - 8$ y $g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$.

Hallo los límites de integración:

$$x^2 - 2x - 8 = -\frac{x^2}{2} + x + 4 \rightarrow 3x^2 - 6x + 24 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+6}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{-2-6}{2} = 2 \end{cases}$$

$$Area = \int_{2}^{4} \left(\left(x^2 - 2x - 8\right) - \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4 \right) \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x + \frac{x^3}{6} - x^2 - 4x \right) \Bigg]_{2}^{4} = \left(\frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 12x \right) \Bigg]_{2}^{4} =$$

$$= \left| \left(-48{,}1\right) - \left(-28{,}1\right) \right| = \left| -20 \right| = 20$$

23. Hallar el área del recinto acotado por la curva $y = x^2 + 4x + 5$ y la recta y =5.

Hallo los límites de integración:

$$x^2 + 4x + 5 = 5 \rightarrow x^2 + 4x = 0 \rightarrow x \cdot (x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$Area = \int_{-4}^{0} \left(\left(x^2 + 4x\right) \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right) \Bigg]_{-4}^{0} = \left| 0 - \left(\frac{-64}{3} + \frac{32\cdot3}{2} \right) \right| = \left| -\frac{32}{3} \right| = 10.66$$

24. Calcular el área del recinto delimitado por las curvas $f(x) = x^2 + 2,$ y $g(x) = x + 2$.

Hallo los límites de integración:

$$x^2 + 2 = 5 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x \cdot (x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$Area = \int_{0}^{1} \left(\left(x^2 + 2\right) - \left(x + 2\right) \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg]_{0}^{1} = \left| \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} + 2 - 0 \right| = \left| -0{,}16 \right| = 0{,}16$$

25. Sea la curva $y = x^2$, calcular el área del recinto limitado por las gráficas de la curva propuesta, la recta tangente a dicha curva en el punto (1,1) y el eje OX.

$$y = x^2 \rightarrow y' = 2x \rightarrow y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

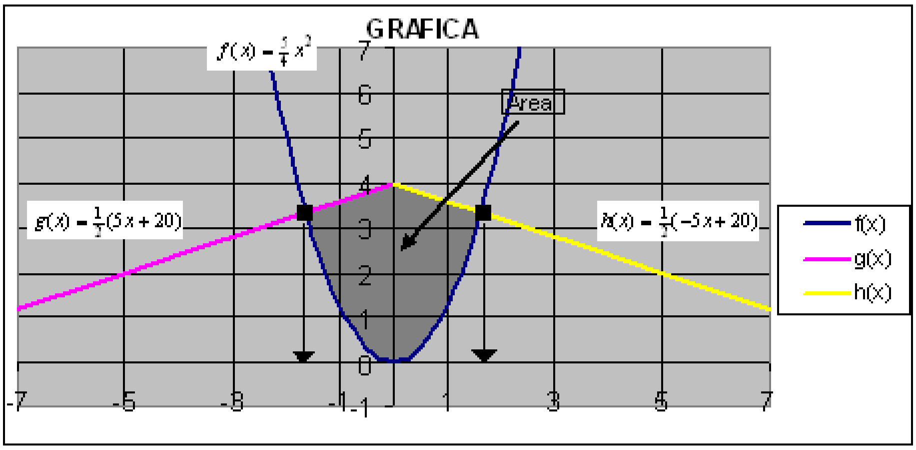
$$y(1) = 1^2 = 1$$

$$y - y(a) = f'(a) \cdot (x - a) \Rightarrow y - 1 = 2 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 2x - 1$$

Los puntos de corte entre las rectas y el eje OX serán desde 0 a 1:

$$Area = \int_{0}^{1} \left(\left(x^2\right) - \left(2x - 1\right) \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - x \right) \Bigg]_{0}^{1} = \left| \frac{1}{3} + 1 - 1 \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

26. Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de $f(x)=\frac{5}{4}x^2$; $g(x)=\frac{1}{2}(5x+20)$; $h(x)=\frac{1}{2}(-5x+20)$, y obtener su área. (se entiende que es el área situada por debajo de y=10)



Hallo los límites de integración entre las gráficas f(x) y g(x):

$$\frac{5x^2}{4}=\frac{1}{2}\cdot(5x+20)\rightarrow\frac{5x^2}{4}-\frac{5}{2}x-10=0\rightarrow x=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\frac{5}{4}\cdot(-10)}}{2\cdot\frac{5}{4}}=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+50}}{\frac{5}{2}}=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{56{,}25}}{\frac{5}{2}}=\frac{2{,}5\pm7{,}5}{2{,}5}=$$

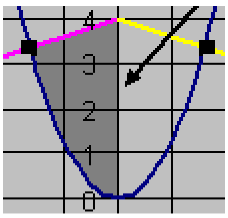
$$\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2{,}5+7{,}5}{2{,}5}=4\\ x_2=\frac{2{,}5-7{,}5}{2{,}5}=-2\end{cases}$$

Hallo los límites de integración entre las gráficas f(x) y h(x):

$$\frac{5x^2}{4}=\frac{1}{2}\cdot(-5x+20)\rightarrow\frac{5x^2}{4}+\frac{5}{2}x-10=0\rightarrow x=\frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\frac{5}{4}\cdot(-10)}}{2\cdot\frac{5}{4}}=\frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+50}}{\frac{5}{2}}=\frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{56{,}25}}{\frac{5}{2}}=\frac{-2{,}5\pm7{,}5}{2{,}5}=$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-2{,}5+7{,}5}{2{,}5}=2\\ x_2=\frac{-2{,}5-7{,}5}{2{,}5}=-4\end{cases}$$

Hallo el área sombreada:



$$Area=\int_{-2}^{0}(g(x)-f(x))dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}\cdot(5x+20)-\frac{5}{4}x^2\right)dx=\left(\frac{5}{4}x^2+10x-\frac{5}{12}x^3\right)\Big]_{-2}^{0}=0-\left|\frac{5(-2)^2}{4}+10(-2)-\frac{5(-2)^3}{12}\right|=$$

$$=\left|0-\left(5-20+\frac{10}{3}\right)\right|=|-11{,}67|=11{,}67$$

La otra mitad del área es simétrica respecto de la sombreada, con lo cual habrá que multiplicar por dos para hallar el área total:

$$Area_{TOTAL}=2\cdot Area=2\cdot 11{,}67=23{,}33$$

27. Calcular el valor de a>0 para que el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y=x^3$, $y=ax$, sea igual a 4.

Hallo los límites de integración:

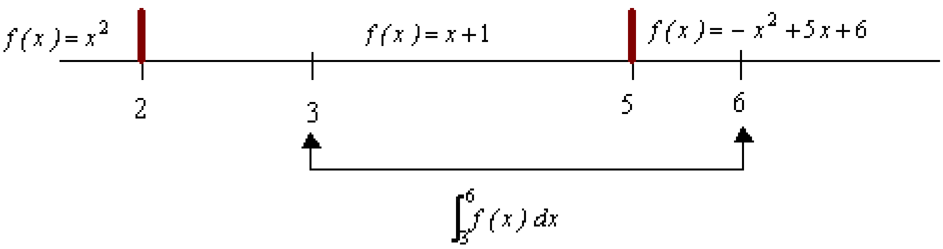
$$x^3=ax \rightarrow x^3-ax=0 \rightarrow x\cdot\left(x^2-a\right)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=+\sqrt{a} \\ x_3=-\sqrt{a} \end{cases}$$

$$Area=\int_{-\sqrt{a}}^{0}\left(x^3-ax\right)dx+\int_{0}^{\sqrt{a}}\left(x^3-ax\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{ax^2}{2}\right)\Bigg]_{-\sqrt{a}}+\left(\frac{x^4}{4}-\frac{a\cdot x^2}{2}\right)\Bigg]_{0}^{\sqrt{a}}=\left|0-\left(\frac{\sqrt{a}^4}{4}-\frac{a\cdot\sqrt{a}^2}{2}\right)\right|+\left|\frac{\sqrt{a}^4}{4}-\frac{a\cdot\sqrt{a}^2}{2}\right|=$$

$$=\left|0-\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\right)\right|+\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\right)=\left|\left|-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right|+\left|\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\right|\right|=\left|\frac{-a^2+2a^2}{4}\right|+\left|\frac{a^2-2a^2}{4}\right|=\left|\frac{a^2}{4}\right|+\left|\frac{a^2}{4}\right|=\frac{2a^2}{4}=4 \rightarrow 2a^2=16$$

$$\rightarrow a^2=8 \rightarrow a=\pm 2\sqrt{2} \rightarrow a=2\sqrt{2}$$

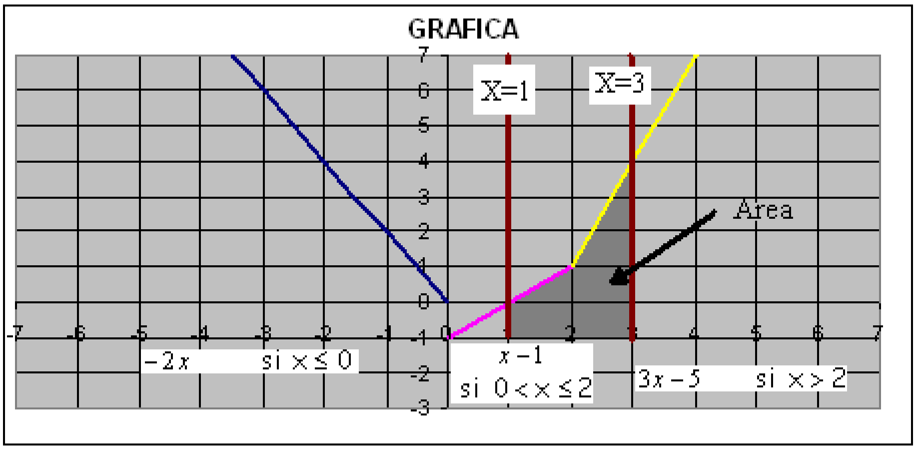
28. Sea $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ \ x<2 \\ x+1 & si\ \ 2\le x\le 5 \\ -x^2+5x+6 & si\ \ x>5 \end{cases}$, calcular la integral $\int_3^6 f(x)\,dx$



$$Area=\int_3^5(x+1)dx+\int_5^6\left(-x^2+5x+6\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg]_3^5+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right)\Bigg]_5^6=\left|12{,}5+5-\left(4{,}2+3\right)\right|+$$

$$\left|-72+90+36-\left(-41{,}6+62{,}5+30\right)\right|=\left|10{,}30\right|+\left|3{,}10\right|=13{,}4$$

29. Sea $f(x)=\begin{cases} -2x & si\ \ x\le 0 \\ x-1 & si\ \ 0<x\le 2 \\ 3x-5 & si\ \ x>2 \end{cases}$. Representar gráficamente la función. Hallar el área delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3.



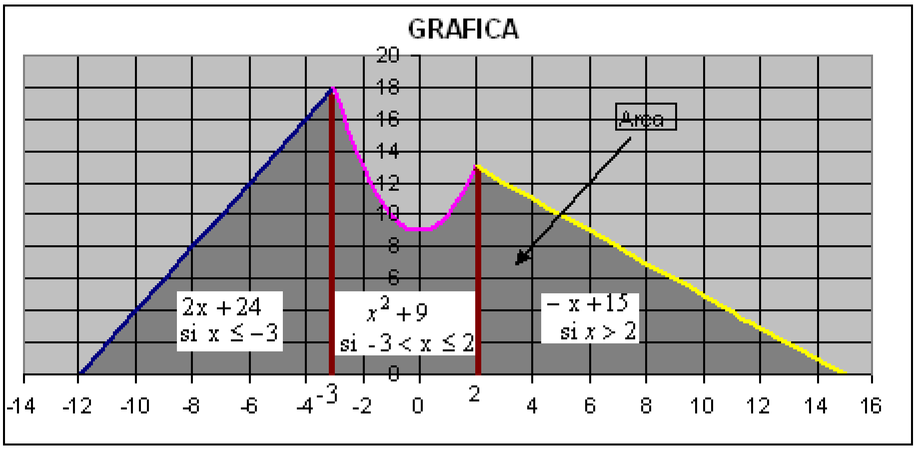
$$Area=\int_1^2 (x-1)dx+\int_2^3 (3x-5)dx=(x^2-x)\Big]_1^2+\left(\frac{3x^2}{2}-5x\right)\Bigg]_2^3=|4-2-1+1|+|13{,}5-15-(6-10)|=|2|+|2{,}5|=4{,}5$$

30. Representar gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x+24 & \text{si } x\le -3\\ x^2+9 & \text{si } -3<x\le 2\\ -x+15 & \text{si } x>2\end{cases}$. Calcular el área delimitado por la gráfica de f(x) y el eje OX.

$$Area=\int_{-12}^{-3}(2x+24)dx+\int_{-3}^{2}(x^2+9)dx+\int_{2}^{15}(-x+15)dx=\left(\frac{2x^2}{2}+24x\right)\Bigg]_{-12}^{-3}+\left(\frac{x^3}{3}+9x\right)\Bigg]_{-3}^{2}+\left(-\frac{x^2}{2}+15x\right)\Bigg]_{2}^{15}=$$

$$\left|\frac{2(-3)^2}{2}+24(-3)-\left(\frac{2(-12)^2}{2}+24(-12)\right)\right|+\left|\frac{2^3}{3}+9\cdot 2-\left(\frac{2(-3)^3}{3}+9(-3)\right)\right|+\left|-\frac{(15)^2}{2}+15\cdot 15-\left(-\frac{2^2}{2}+15\cdot 2\right)\right|=$$

$$=81+56.66+84.5=222{,}16$$



31. Sea la función $f(x)=3-x-\dfrac{2}{x}$, definida en los reales salvo en x=0. Calcular El área de la región limitada por la gráfica de f(x) y el semieje positivo OX.

Hallo los límites de integración:

$$3-x-\frac{2}{x}=0\rightarrow x^2-3x+2=0\rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\!\!\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=1\end{cases}$$

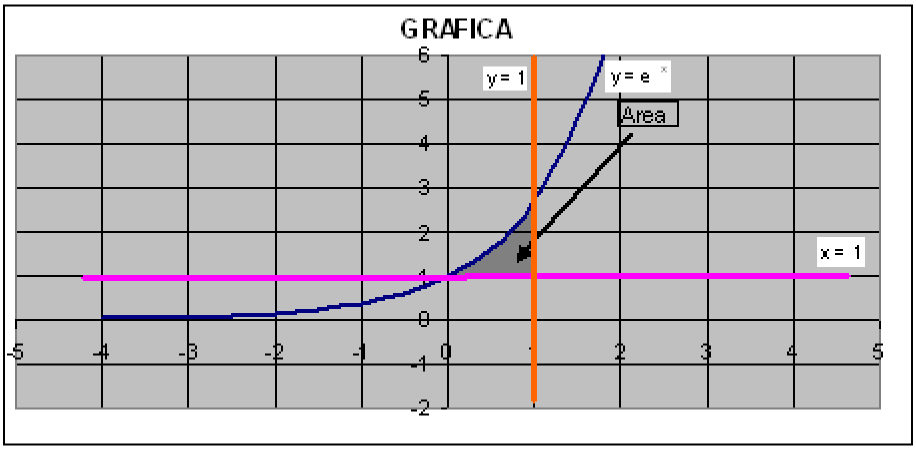
$$Area=\int_1^2\left(\left(3-x-\frac{2}{x}\right)\right)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}-2Lnx\right)\Big]_1^2=\left|6-2-2Ln2-\left(3-\frac{1}{2}-2Ln1\right)\right|=\left|4-2Ln2-\left(\frac{5}{2}\right)\right|=\frac{3}{2}-2Ln2=0.12$$

32. Hallar el área de la región acotada por la curva y = e ^{x} y las rectas y = 1, x = 1.

Hallo los límites de integración:

$e^x=1\rightarrow x=0$

$$Area=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 1dx=e^x\Big]_0^1-x\Big]_0^1=\left(e^1-e^0\right)-(1-0)=e-1=1.72-1=0.72$$

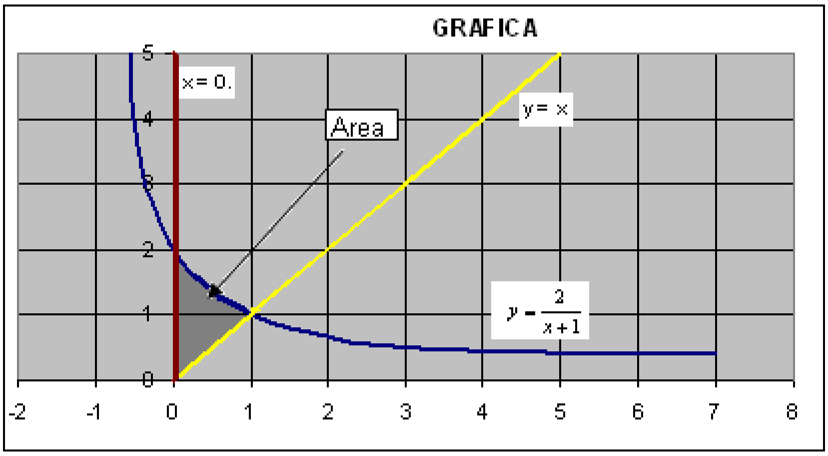


33. Calcular el área que está limitada por las siguientes curvas en el primer cuadrante: $y=\frac{2}{x+1}$, y = x , x = 0.

Hallo los límites de integración:

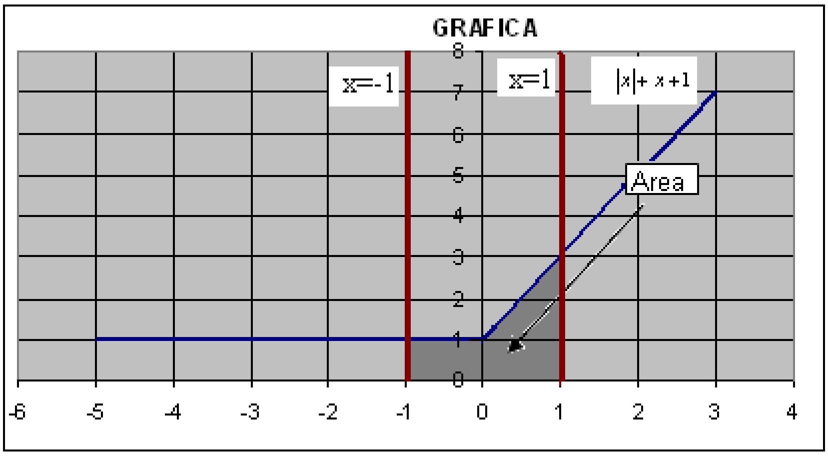
$$\frac{2}{x+1}=x\rightarrow x^2+x=2\rightarrow x^2+x-2=0\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-2\\x_2=1\end{cases}$$

$$Area=\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}+x\right)dx=2Ln(x+1)+\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=\left(2\cdot Ln2+\frac{1}{2}\right)-(0)=0.88$$



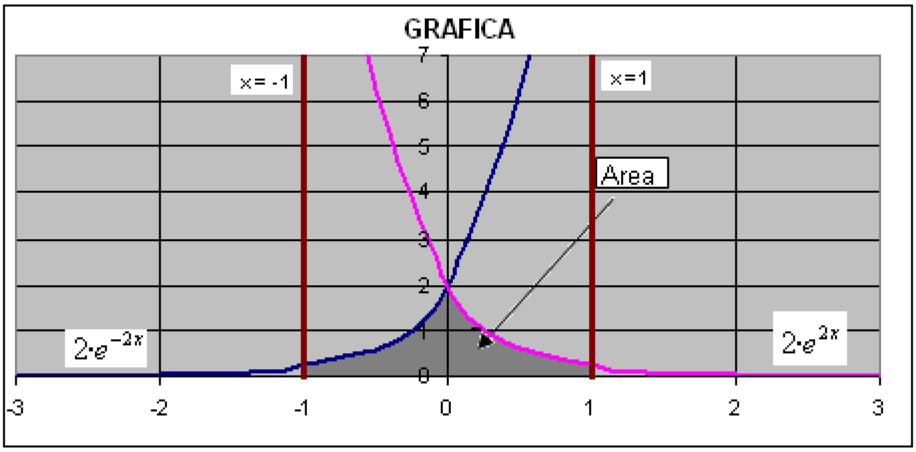
34. Calcular la integral definida: $\int_{-1}^{1}(|x|+x+1)dx$, donde |x| representa el valor absoluto de x.

$$\int_{-1}^{0}(-x+x+1)dx+\int_{0}^{1}(-x+x+1)dx = x\big]_{-1}^{0}+\left.\frac{2x^2}{2}+x\right]_{0}^{1} = |0-(-1)|+|1+1-0| = 3$$



35. Dibujar las gráficas de las funciones y = 2 e ^{2x}, y = 2 e $^{-2x}$. Calcular el área comprendida entre dichas gráficas y las rectas verticales x = -1 , x = 1.

$$Area = \int_{-1}^{0}(2e^{-2x})dx+\int_{0}^{1}(2e^{2x})dx = -2e^{-2x}\big]_{-1}^{0}+2e^{2x}\big]_{0}^{1} = \left|-2e^{-2\cdot 0}-2e^{-2\cdot(-1)}\right|+\left|2e^{-2}-2e^{2\cdot 0}\right| =$$
$$= 2-2e^{2}+2e^{-2}+2 = 4-2e^{2}+2e^{-2} = 2\left(e^{-2}-e^{2}+2\right) = 10.50$$



36. Hallar el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva $y = x^2 - 4x - 5$ en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.

$$Area = \int_{-1}^{2}(-x-1)dx + \int_{2}^{5}(x+5)dx = -\frac{x^2}{2} - x\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} + 5x\Big]_{2}^{5} = \left|0 - \left(-\frac{(-1)^2}{2} - (-1)\right)\right| + \left|\frac{25}{2} + 25 - \left(\frac{4}{2} + 10\right)\right| =$$

$$= \left|0 - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right| + \left|\frac{25}{2} + 25 - 12\right| = \frac{3}{2} + \frac{25}{2} + 13 = \frac{3+25+26}{2} = \frac{54}{2} = 27$$