EXAMEN 2º BACHILLERATO. CIENCIAS SOCIALES.1º EVALUACION

1.- Una multinacional de seguros tiene delegaciones de Madrid, Barcelona y Sevilla. El número total de ejecutivos de las tres delegaciones asciende a 31. Para que el número de ejecutivos de la delegación de Barcelona fuese igual al de Madrid, tendrían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Además, el número de los de Madrid excede en uno a la suma de los destinados en las otras ciudades. ¿ Cuántos ejecutivos están destinados en cada ciudad?.

2.- Se considera, si es posible, los siguientes sistemas:

$$\left[\begin{array}{l} x-y+2z=-4 \\ 3x-5y+8z=-14 \\ x+3y-2z=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3x+2y=6 \\ x+y=1 \\ 3x+2y=0 \end{array}\right.$$

3.- Se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{l} x+y+kz=4 \\ 2x-5y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro k.
b) Resolverlo cuando k=0

4.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Probar que se verifica $A^3+I=0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.

5.- Encontrar todas las matrices X tales que $AX=XA$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

6.- Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Resolver la ecuación $XA-B=2I$

SOLUCIONES EXAMEN

<u>1.-</u> $X =$"$n^o\, ejecutivos\_Madrid.$"
$Y =$"$n^o\, ejecutivos\_Barcelona.$"
$Z =$"$n^o\, ejecutivos\_Sevilla.$"

$$\begin{cases} x+y+z=31 \\ y+3=x-3 \\ x=y+z+1 \end{cases} \xrightarrow[e3=e3+e1]{} \begin{cases} x+y+z=31 \\ -x+y=-6 \\ 2x=32 \end{cases} \longrightarrow x=\frac{32}{2}=16 \text{ sustituyo en las demás}$$

ecuaciones: $y=10$, $z=5$

2a.- $$\begin{cases} x-y+2z=-4 \\ 3x-5y+8z=-14 \\ x+3y-2z=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{e2=e2-3e1 \\ e3=e3-e1}]{} \begin{cases} x-y+2z=-4 \\ -2y+2z=-2 \\ 4y-4z=4 \end{cases} \xrightarrow[e3=e3+2e2]{}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=-4 \\ -2y+2z=-2 \\ 0=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-y+2z=-4 \\ -2y+2z=-2 \end{cases} \longrightarrow \text{SIST.COMP. INDETERMINADO}$$

$$z=\lambda \longrightarrow \begin{cases} x-y=-4-2\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \longrightarrow y=1+\lambda \longrightarrow x=-4-2\lambda+1+\lambda=-3-\lambda$$

Solución: $$\begin{array}{l} x=-3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{array}$$

2b.- $$\begin{cases} 3x+2y=6 \\ x+y=1 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \xrightarrow[e3=e3-e1]{} \begin{cases} 3x+2y=6 \\ x+y=1 \\ 0=-6 \end{cases} \longrightarrow \text{SIST.INCOMPATIBLE}$$

<u>3a.-</u> $$\begin{cases} x+y+kz=4 \\ 2x-5y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \text{determinante}$$

Hallo el rango de la matriz A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5-2+6k-5k+2-6k=0 \longrightarrow -5k=-5 \longrightarrow k=1$$

a) caso $k=1 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5-2+6-5+2-6=0 \longrightarrow rg(A)\ \pi\ 3$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5-2=-7 \neq 0 \longrightarrow rg(A)=2$$

Hallo el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20-5+0+0-8-15=-48 \neq 0 \longrightarrow rg(\overline{A})=3$$

$rg(A)=2$, $rg(\overline{A})=3$, $n=3 \longrightarrow$ SIST.COMP. INDETERMINADO (S.C.I.)

b) caso $k \neq 1 \longrightarrow rg(A)=3, rg(\overline{A})=3, n=3 \longrightarrow$ SIST.COMPATIBLE DETERMINADO (S.C.D.)

3b.- Resolverlo cuando k=0

$$\begin{cases} x+y+0z=4 \\ 2x-5y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \text{determinante}$$

Hallo el rango de la matriz A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5-2+0+0+2+0=5 \neq 0 \longrightarrow rg(A)=3$$

Hallo el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -80+0+0+0-60-20=-160 \neq 0 \longrightarrow rg(\overline{A})=3$$

$rg(A)=3$, $rg(\overline{A})=3$, $n=3 \longrightarrow$ SIST.COMPATIBLE DETERMINADO (S.C.D.)

4.- Probar que se verifica $\underline{A^3+I=0}$

$$A^3 = A^2 * A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$A^3 = A^2 * A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ecuación: $A^3 + I = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

obtener $A^{10} \longrightarrow A^{10} = A^3 * A^3 * A^3 * A =$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5.- Encontrar todas las matrices X tales que $AX = XA$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$AX = XA \longrightarrow$ siendo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} a+4b = a \\ b = 2b \\ 4a+2c = c+4d \\ 4b+2d = 2d \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 0 = 0 \\ c = 4d-4a \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Soluciones:

$b = 0$

$c = 4d - 4a$

6.- Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Resolver la ecuación

$$XA - B = 2I \longrightarrow XA = 2I + B \longrightarrow XAA^{-1} = (2I + B)A^{-1}$$

$$\longrightarrow X * Id = (2I + B)A^{-1} \longrightarrow X = (2I + B)A^{-1}$$

Hallo la matriz inversa de A: A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -0 - 12 - 15 - (-12 - 16 - 0) = 1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta.

$$(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es igual al inverso del valor de su determinante por la matriz traspuesta de la adjunta.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación $X = (2I + B)A^{-1}$

$$X = \left(2 * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 1 \\ 17 & -13 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$